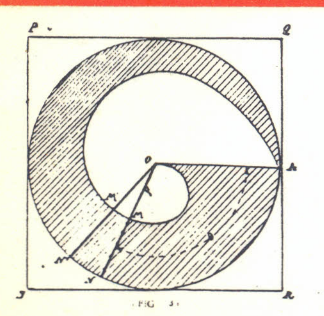
LECCIONES DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Eduardo García de Zúñiga



FHCE
FACULTAD
DE HUMANIDADES
Y CIENCIAS
DE LA EDUCACION

Eduardo García de Zúñiga

LECCIONES DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

LECCIONES DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

Eduardo García de Zúñiga

08-92

Universidad de la República

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Departamento de Publicaciones

Facultad de Humanidades y
Ciencias de la Educación
Universidad de la República

Queda hecho el depósito que marca la ley.
Printed in Uruguay - Impreso en Uruguay

PALABRAS PRELIMINARES

A pedido del Centro de Estudiantes de Ingeniería, García de Zúñiga dictó, entre 1924 y 1935, seis conferencias sobre Historia de las Matemáticas. Fueron publicadas en la revista del Centro y en sus sucesoras*. La presente edición constituye un homenaje de la Facultad de Humanidades y Ciencias a la Facultad de Matemática, fundada en 1888 y uno de cuyos primeros tres estudiantes fue precisamente Garcìa de Zúñiga. Ese mismo año de 1888 es el de la Ley de Aduanas, intento serio si los hubo de protección de la industria nacional (que difiere de las tendencias actualmente dominantes). La Facultad de Humanidades y Ciencias publica por ello, simultáneamente con las conferencias de García de Zúñiga, pero en volumen aparte, tres textos relativos a la Ley, debidos a José Pedro Barrán, a Alción Cheroni y a Thomas Glick.

Las seis conferencias sobre Historia de las Matemáticas están precedidas por un texto de José Luis Massera sobre la matemática en el Uruguay y por el escrito por Rafael Laguardia en ocasión de la muerte de García de Zúñiga.

No hacemos más que un escueto comentario a las conferencias aquí presentadas: ellas muestran un tratamiento casi profesional, destacable dentro de una disciplina -la Historia de la Matemática- situada entonces en una etapa, podríamos decir, netamente pre-profesional.

Para terminar digamos que no sólo la Facultad de Ingeniería le debe a García de Zuñiga, cosa bien sabida, aportes fundamentales**, el país mismo lo contó como impulsor serio y decidido de un conjunto de proyectos tendientes claramente a una real emancipación nacional***.

M. H. O.

---

* Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería, Montevideo (1924, 1925, 1928 y 1929) y las tres últimas en la Revista de Ingeniería, Montevideo (1935).

** No menor entre ellos es la biblioteca de fuentes de Historia de la Ciencia y de Historia de las Matemáticas situada en la Facultad de Ingeniería, que sigue siendo ejemplar como tal y que algún día habrá que difundir y completar.

*** Ver Cheroni, Alción, *Políticas científicas-tecnológicas en el Uruguay del siglo XX*, Facultad de Humanidades y Ciencias, 1989.

LOS ORIGENES Y EL DESARROLLO DE LA ESCUELA URUGUAYA DE MATEMATICAS*

José Luis Massera

Esta nota no tiene ninguna pretensión de ser un trabajo histórico profundo. Intenta solamente fijar algunos hechos documentales y recuerdos personales para evitar el riesgo de que caigan en un lapso de no muchos años, en un olvido del que sería quizá difícil rescatarlos.[1] Por eso mismo, estas líneas tendrán también mucho de autobiográfico.

En 1885 se creó, en el seno de la Universidad de la República (Uruguay), la Facultad de Matemáticas y Ramas Anexas, cuya Ley Orgánica fue aprobada el 14 de octubre de ese año; la precedieron en la Universidad, la Facultad de Derecho y Ciencias Sociales y la de Medicina y Ramas Anexas. Los cursos comenzaron a dictarse en 1888 –celebramos ese centenario precisamente en este año– y la primera promoción estaba integrada por sólo tres estudiantes, entre los que se contaba Eduardo García de Zúñiga, de quien hablaremos largamente más adelante. Los tres se graduaron como ingenieros en 1892. Pese a su nombre científico, la Facultad tenía en realidad, un carácter estrictamente profesionalista y otorgaba primitivamente títulos de Ingeniero, Arquitecto y Agrimensor.

En 1915, la Facultad se escindió en dos: la Facultad de Ingeniería y Ramas Anexas (actualmente llamada Facultad de Ingeniería) y la Facultad de Arquitectura; el perfil académico de ambas no sufrió, sin embargo, en ese momento, ningún cambio digno de señalarse.

Como antecedentes propiamente matemáticos más lejanos de que tengamos noticias, cabe señalar algunas actividades a principios de este siglo. En ellas tuvo relevancia el Ingeniero en Ferrocarriles, de origen español, Rafael Barrett, que además de su actividad profesional, cultivaba la literatura –sus novelas y ensayos, de acentuado contenido social, acerca del Chaco Paraguayo, fueron muy leídos en los países de la cuenca del Río de la Plata y particularmente en el Uruguay– y también la matemática. Se sabe que dictó conferencias sobre geometrías no euclidianas y que demostró una fórmula de Teoría de Números, que comunicó en una carta personal a H. Poincaré, de fecha 6 de octubre de 1903. El texto de la carta fue publicado (García de Zúñiga, 1935).

Sin duda, la primer figura realmente importante a la que hay que referirse como "antepasado ilustre" de la matemática uruguaya es, sin embargo, la del Ing. E. García de Zúñiga (1867-1951) a quien los que tuvimos el honor de ser sus discípulos y amigos llamábamos respetuosa y cariñosamente "Don Eduardo". Fue un ingeniero cabal, que ejerció su profesión en obras importantes, como las del Puerto de Montevideo. Al mismo

* El presente trabajo ha sido publicado originalmente este mismo año en *Interciencias*, Caracas, Venezuela, Vol. 13 No.4, págs. 177-182.

tiempo, era un hombre de una excepcional y vasta cultura científica y literaria, que dominaba el griego y el alemán. Leía en su idioma original las grandes obras literarias de la antigüedad clásica, de las que tenía muy ricas colecciones en la amplia y acogedora biblioteca de su casa solariega, en el pequeño pueblo de Progreso, a algunas decenas de kilómetros de Montevideo.

Don Eduardo no era propiamente un matemático, pero tenía una sólida formación en esa disciplina y dictó con gran solvencia los cursos correspondientes de la Facultad, desde comienzos del siglo. El libro que escribió como texto del curso de primer año (García de Zúñiga, 1932) introduce el número real por el método de las sucesiones de Cauchy de números racionales ("sucesiones fundamentales") y demuestra rigurosamente todas las propiedades del cuerpo de los reales, incluídos los límites de sucesiones reales. Seguramente, el método no era pedagógicamente aconsejable para alumnos de una Facultad de Ingeniería, pero desde el punto de vista matemático era impecable e hizo mis delicias cuando en 1937 fui discípulo suyo en ese curso. García de Zúñiga era ya hombre de avanzada edad, pero conservaba una admirable lucidez.

Además, publicó en la *Revista de Ingeniería y en el Boletín de la Facultad* varios artículos sobre historia de la matemática y un breve ensayo, posiblemente con cierto nivel de originalidad (García de Zúñiga, 1928). Para Laguardia, para mí y otros que nos interesábamos por la matemática en la década de los 30, el estímulo y apoyo, eficaces y cordiales, que nos brindaba Don Eduardo fue un factor no pequeño que nos ayudó mucho en los primeros años de nuestro trabajo académico.

Sin embargo, desde el punto de vista del desarrollo de nuestra ciencia en el Uruguay, su obra principal, que contribuyó mucho a la formación científica de sucesivas generaciones de matemáticos en nuestro país, fue su labor en la Biblioteca Central de la Facultad, que lleva su nombre desde poco después de su fallecimiento. Sin entrar a juzgar sus méritos en otras ramas de la ciencia y la técnica, estoy convencido de que, hasta hace algunos años[2] era una de las mejores bibliotecas y hemerotecas matemáticas de América Latina, si no la mejor, y tenía un nivel comparable con no pocas grandes bibliotecas de Europa y los Estados Unidos. Varios matemáticos de nivel mundial que la frecuentaron –podría mencionar a J. Rey Pastor, Beppo Levi, L. Schwartz y muchos otros– no ocultaban su admiración al encontrarse en un país latinoamericano con una institución de tan altos valores.

Antes de entrar en la historia propiamente dicha de la matemática uruguaya, me parece justiciero mencionar aquí a algunos otros profesores de la Sección Preparatorios de la Enseñanza Secundaria[3] –que, por aquel entonces dependía de la Universidad– y de los primeros años de la Facultad de Ingeniería que, si bien no eran matemáticos en el sentido propio de la palabra, contribuyeron positivamente a la formación de los primeros matemáticos de nuestro país. Me refiero a ingenieros como C. Galli, E. Tourn, M. Coppetti, J.C. Rezzano y otros.

La figura que, concretamente, dio el impulso inicial, que se prolongó luego en una sistemática, clarividente y tesonera labor de varias décadas, para el desarrollo de la matemática en el Uruguay fue la del Prof. Ing. Rafael Laguardia (1906-1980). Ya desde muy

joven evidenció una vocación muy definida, por lo cual su padre le costeó una estadía en Francia, en 1926-1928, donde cursó estudios en la Faculté de Sciences de Paris (Sorbonne) y obtuvo el título de Licence dés Sciences, habiendo atendido cursos con profesores eminentes como Goursat, Picard, Denjoy, Julia y Montel. Antes de ese viaje, había ganado por concurso (1924) un cargo de Profesor de Enseñanza Secundaria (Sección Preparatorios), que ocupó efectivamente después de su regreso de Europa, desde 1929 hasta 1945. También en 1929, ganó un concurso y fue designado Ayudante de Geometría Analítica en la Facultad de Ingeniería, a la que había ingresado como estudiante en 1925 y se graduó de Ingeniero Industrial en 1941. Su carrera docente en la Universidad se prolongó sin interrupción hasta 1973 , en que fue expulsado de ella por la intervención. En su carrera llegó a ocupar cargos de Profesor Titular en las Facultades de Ingeniería (1953-1973) y de Humanidades y Ciencias (1946-1952). Dictó también clases en la Escuela Naval y dio cursos libres extracurriculares de matemática superior en el Instituto de Estudios Superiores (1929-1935).

Su formación de postgrado la realizó en la Universidad del Litoral (Argentina, 1943), bajo la dirección del Prof. Beppo Levi, en la Universidad de Harvard (EEUU, 1944-1945), bajo la dirección del Prof. Widder, y en la Universidad de Princeton (EEUU, 1945-1946), bajo la dirección de los Profs. Bochner, Chevalley y Lefschetz. En esas ocasiones y en años posteriores realizó diversos trabajos de investigación, obteniendo resultados importantes en la teoría de la transformación de Laplace y de sus iteradas, que fueron publicadas en la Argentina, en el Uruguay y en el *Mathematische Annalen*. Además publicó varios artículos de carácter docente y de divulgación científica. Fue un incansable promotor del desarrollo de las ciencias, particularmente de la matemática, no sólo en el Uruguay sino en el ámbito más amplio de América Latina; junto con otros matemáticos y cultores de diversas ramas científicas, fue fundador y activo participante de la Asociación Uruguaya para el Progreso de la Ciencia (1948).

Volviendo un poco atrás, cabe mencionar que, en la década del 30 y por una circunstancia casual,[4] Laguardia se vinculó a un muy culto emigrante judío ruso, cuyo hijo tenía gran vocación por la matemática, al cual prestó ayuda y orientación en sus estudios. Era el joven Mischa Cotlar, que pasó a integrar el grupo de quienes nos empezábamos a ocupar sistemáticamente de la matemática, al que me referiré inmediatamente. Cotlar, que no había terminado de cursar la enseñanza media, avanzó rápidamente en sus estudios y trabajos matemáticos, demostrando, desde sus inicios, una gran originalidad de pensamiento; años después se doctoró en la Universidad de Chicago y llegó a ser matemático de nivel mundial, con importantes contribuciones al Análisis. Actualmente trabaja en la Universidad Central de Venezuela. Es interesante anotar que un artículo suyo, quizás su primer trabajo de investigación, fue publicado en Montevideo (Cotlar, 1937).

Mi relación personal con Laguardia se inició en 1935. Fuimos ambos delegados estudiantiles a la Asamblea General del Claustro de la Universidad en 1935, bajo la dictadura de Terra. Esa relación se hizo rápidamente muy estrecha y se prolongó sin interrupciones hasta su fallecimiento. Hacía varios años (1929) que mi vocación se había manifestado con claridad y me llevó a desarrollar, paralelamente a los estudios liceales, una intensa y solitaria actividad de adquisición de conocimientos extracurriculares, entera-

mente autodidáctica y extraordinariamente desordenada, hasta 1935. En ese año, mi ingreso a la Sección Preparatorios y los comienzos de mi amistad con Laguardia –de quien fui alumno en mi primer año de la Facultad de Ingeniería– permitieron que comenzara a poner orden y rigor en esa masa grande, pero caótica de conocimientos. Mi carrera docente en la Facultad de Ingeniería se inició en 1937, como Ayudante Encargado de Clases, y se prolongó hasta la actualidad, habiendo sido designado Profesor Titular en 1943, luego de obtener mi título de Ingeniero Industrial. También ingresé como docente, en 1952, en la Facultad de Humanidades y Ciencias, de la que pasé a ser Profesor Titular, después de la renuncia de Laguardia, hasta 1963, en que renuncié a ese cargo. En 1947-1948 hice un viaje a los Estados Unidos, donde estudié e investigué en las universidades de Stanford (Profs. Polya, Szegö, Rademacher, Minorsky), Nueva York (Profs. Courant, Friedrichs, Artin, Stoker) y Princeton (Profs. Lefschetz, Hurewicz, E. Hopf).

A fines de la década del 30 y comienzos de la del 40 se produjo un hecho nuevo e importante para la matemática uruguaya, del cual he hecho una breve mención. El Profesor español J. Rey Pastor, que estaba radicado en la Argentina, comenzó a viajar sistemáticamente a Montevideo en los fines de semana, durante un período relativamente largo, y nos dictaba cursos de matemática moderna, principalmente de lo que hoy llamaríamos Topología General, que nos abrieron nuevos horizontes. Como detalle curioso cabe señalar que esos cursos se dictaban no en locales universitarios sino en un saloncito cedido por una vieja institución cultural privada, el Ateneo de Montevideo. Además de Laguardia, Cotlar y yo, participaban en esas actividades otros jóvenes con marcada inclinación matemática, entre los que recuerdo a A. Petracca, F. Forteza, C.J. Infantozzi y J. Vales, que de hecho constituían el primer pequeño grupo de personas que cultivaban asiduamente la matemática en el Uruguay, al que Rey Pastor prestaba ayuda y estímulo. También estaba vinculado a este grupo L. Castagnetto, que había hecho estudios avanzados en Francia. Dado que en el grupo había quienes se interesaban particularmente y con cierta profundidad por determinadas subáreas (Análisis, Series de Fourier, Algebra Moderna, etc.) celebrábamos también reuniones o cursillos en que cada uno exponía a los demás lo que estaba estudiando.

Algunos años después, jugó un papel importante en el Uruguay el Prof. Beppo Levi que, aún en la época en que estaba radicado en la Argentina, venía con frecuencia a Montevideo y se vinculó estrechamente al núcleo uruguayo, a cuya formación contribuyó mucho. También prestaron ayuda y estímulo positivo otros matemáticos europeos emigrados a la Argentina: italiano (A. Terracini), españoles (L.A. Santaló, M.Balanzat, P.Pi Calleja, E. Corominas) y portugués (A.Monteiro). Desde esas épocas se establecieron contactos bastante estrechos con los matemáticos argentinos (A. González Domínguez, J. Babini, F. Toranzos, M. Sadosky, Y. Frenkel, A. Calderón, E. Zarantonello, E. Roxin y otros), agrupados en la Unión Matemática Argentina, a cuyas reuniones anuales concurríamos con asiduidad y en cuya *Revista* fueron publicados no pocos trabajos de matemáticos uruguayos.

Como se ve, este período inicial, que fue importante para el desarrollo de la matemática uruguaya, tuvo un sesgo marcadamente rioplatense, en el que se inscribían las contribuciones mencionadas de matemáticos de los países del sur de Europa.

La creación del Instituto de Matemática y Estadística (IME) de la Facultad de Ingeniería –que desde 1985 lleva el nombre de "Prof. Ing. Rafael Laguardia"– en 1942, fue sin duda el punto de arranque de la conformación de la escuela matemática uruguaya propiamente dicha. El momento y el lugar de ese acontecimiento no fueron casuales. En una Universidad que tradicionalmente se limitaba, casi exclusivamente, a impartir enseñanza para formar profesionales de diferentes ramas que la sociedad necesitaba y que, por ello, estaba rígidamente compartimentada en varias Facultades correspondientes a esas distintas profesiones, el estudio de las ciencias era un medio pero no un fin en sí mismo; era, al mismo tiempo, fundamental –porque constituía el basamento previo al aprendizaje profesional– y accesorio. Al no existir una Facultad de Ciencias, ante quienes se interesaban por las ciencias básicas, salvo casos extraordinariamente excepcionales, no se abría otra posibilidad real más que la de ingresar a aquella Facultad profesional más afín a la ciencia de su predilección. Para la matemática era, naturalmente, la Facultad de Ingeniería; para las ciencias biológicas, la de Medicina y eventualmente las de Agronomía, Veterinaria y Odontología; y así sucesivamente.

Por otro lado, la enseñanza se impartía por cátedras prácticamente aisladas entre sí. Sin embargo, en lo fundamental después de transcurrido el primer cuarto de siglo, surgió la tendencia a agrupar en Instituos a los catedráticos y docentes de menor jerarquía de una determinada orientación científica o técnica. Simultáneamente, y era el aspecto más importante de la nueva tendencia, en esos Institutos se planteaba más o menos claramente la necesidad de la investigación en las respectivas disciplinas. La Facultad de Medicina fue pionera en este sentido, pero su ejemplo fue progresivamente seguido por otras Facultades, entre ellas la de Ingeniería, con sus Institutos de Ensayo de Materiales y de Estática. Es justo señalar, aunque exija una breve digresión, un fenómeno análogo, pero fuera de la Universidad: un joven maestro de la enseñanza primaria, que había estudiado en España con Ramón y Cajal, promovió a su regreso la formación de un instituto –que hoy lleva su nombre– íntegramente dedicado a la investigación: el Instituto de Investigación en Ciencias Biológicas "Clemente Estable"(IIBCE).

En ese nuevo clima, Laguardia tomó la iniciativa que condujo a la creación del IME, para lo cual contó con el importante apoyo del por entonces Decano de la Facultad, Ing. V.I. García, Director del Instituto de Ensayo de Materiales, hombre inteligente y abierto a las ideas académicas que penetraban como "novedades" en la vieja estructura de nuestra Universidad. En el discurso de inauguración de los cursos de 1942, el Decano dijo que "el afán por el estudio y la investigación no significa desdeñar la preparación de nuestros futuros profesionales, pero dedicarse solamente a esta tarea, prescindiendo de toda labor científica, equivaldría a transformar la Facultad en una simple escuela profesional".

Poco después, Laguardia presentó el proyecto del IME, que fue aprobado por el Consejo de la Facultad el 16 de abril de ese año y llamó a aspirantes para su dirección; el 22 de octubre designó a Laguardia para ese cargo, que ocupó hasta 1970. En el proyecto y en su exposición de motivos se establecían claras orientaciones y funciones del IME; que fueron aplicadas y desarrolladas consecuentemente por medio de sucesivas y adecuadas iniciativas:

1. Captación de jóvenes capaces y primeros pasos en su formación

Este objetivo se lograba:

a) Por medio del Seminario Elemental dirigido a estudiantes de la Sección Preparatorios de la Enseñanza Secundaria y de los primeros años de la Facultad, a los que se ofrecía cursillos especiales libres, estímulos a la lectura, facilidades para la realización de consultas con los profesores y, sobre todo, proponiéndoles numerosos problemas relativamente elementales pero no rutinarios, sobre los más diversos temas (al estilo de las *Aufgaben und Lehrsätze* de Polya-Szegö). El Seminario tendía así a fomentar una actividad creativa temprana que acercara a la investigación.

A ello contribuía mucho, también la calidad, alto nivel y exigencia de los cursos curriculares para ingenieros.

b) Ofreciendo cursillos y seminarios extracurriculares.

c) Becas de estudio y estímulos para que se presentaran a concursos de cargos de ingreso a la docencia a los jóvenes que se destacaban.

2. Formación y desarrollo de investigadores

La investigación debía ser la actividad principal del IME. En la medida de lo posible, debería comprender a personas especializadas en temas relevantes de las subáreas fundamentales que integraran un grupo suficientemente numeroso y con un máximo posible de coherencia, intercomunicabilidad y capacidad para esfuerzos multidisciplinarios, evitando tanto la especialización estrecha y prematura como la dispersión superficial. Con esa meta general, se propendía a:

a) Selección cuidadosa y severa del personal docente, en base a su capacidad, conocimientos, imaginación y laboriosidad. Incorporación temprana a las tareas de investigación.

b) Creación de una carrera docente con exigencias crecientes para los niveles sucesivos, que estimulara la superación de cada profesor, al mismo tiempo que se evitaban precipitaciones en el ascenso de los mismos. Propender a una alta dedicación horaria, tendiendo a la dedicación total.

c) Elevación sistemática de la capacidad y participación de cada docente, agotando, en primer término, las posibilidades locales de hacerlo (cursos y cursillos extracurriculares, seminarios, estudios guiados individuales o de grupos, etc.).

d) Una vez cumplida la etapa anterior, facilitar y estimular la realización de estudios de postgrado en centros de excelencia en el extranjero por medio de becas adecuadas. Participación en conferencias, simposios, congresos y otras reuniones científicas regionales e internacionales. A partir de cierto momento, estas actividades lamentablemente decayeron hacia un cierto aislamiento internacional en lo que influyeron las carencias presupuestarias.

e) Reunión, sin periodicidad fija pero bastante frecuentes, del Coloquio de Matemática, al que asistía el personal del IME y otras personas interesadas, particularmente jóvenes, en el que un docente exponía resultados de sus propios estudios e investigaciones, planteaba problemas aún no resueltos o comunicaba trabajos de otros investigadores. El Coloquio era uno de los principales instrumentos para fomentar la vida colectiva,

el intercambio y discusión de opiniones, la manifestación viva del proceso de la investigación y de inquietudes e interrogantes científicas, etc.

f) Promover, como meta explícita, que la investigación alcanzara un nivel internacional, eliminando todo "complejo de inferioridad" de los jóvenes capaces y fomentar su pensamiento independiente.

3. Desarrollo de la infraestructura necesaria a la investigación

a) Preocupación por mantener al día las bibliotecas y hemerotecas matemáticas (la Central de la Facultad y la especialidad del IME), y sus colecciones de aparatos y microfilms, inclusive de la Facultad de Humanidades y Ciencias desde el momento en que ésta fue creada y, por colmar las lagunas que existieran en las colecciones de revistas.

b) Edición de dos series de publicaciones (sin periodicidad), las publicaciones del IME (que fundamentalmente contenían resultados obtenidos por sus propios investigadores, salvo las que fueron publicadas en revistas extranjeras) y las Publicaciones Didácticas del IME. Esto permitía, además, obtener por canje, un importante número de publicaciones extranjeras.

c) Selección cuidadosa y severa, por exigentes concursos de pruebas, del personal administrativo. La calidad del mismo desterraba el burocratismo, consustanciaba a ese personal con las finalidades del IME y permitía que los investigadores pudieran liberarse de muchas tareas técnicas.

d) Esfuerzo por mejorar y ampliar las condiciones locativas.

4. Preocupación por elevar la calidad de la docencia

Tanto en la propia Facultad de Ingeniería como en otras Facultades de la Universidad (donde en muchos casos, dictaban cursos docentes del IME), y también en la enseñanza preuniversitaria.

5. Preocupación por las aplicaciones de la matemática y el asesoramiento

En cuanto existieron posibilidades para ello, integraron el personal del IME dos "calculistas", que adquirieron cierta especialización en los métodos del cálculo numérico e incluso dictaron cursillos sobre este tema. Disponían de máquinas electromecánicas de cálculo y evacuaron numerosas consultas de otros servicios de la Facultad y de la Universidad, así como extrauniversitarias.

Más tarde (1963), Laguardia promovió la creación de la Comisión para el Tratamiento de la Información, que él presidió y, que dio origen al Centro de Computación de la Universidad (1966, actualmente DICUR) y al Instituto de Computación de la Facultad de Ingeniería (INCO).

Por otro lado, hubo algunos casos de realización de trabajos interdisciplinarios de investigación con otros Institutos, en que se utilizaron ramas de la matemática no meramente computacionales. Pero la falta de desarrollo de la Matemática Aplicada fue y sigue siendo una gran carencia y hay mucha preocupación porque sea rápidamente subsanada.

6 *Relaciones personales en el IME*

Laguardia puso siempre un gran énfasis en la necesidad de que se cultivara en el IME, un clima de relaciones humanas de confianza, franqueza, cordialidad amistosa, respeto, colaboración, trabajo y disciplina. Esto no excluía, al contrario, presuponía la independencia de criterio de cada uno y la discusión constructiva de todos los problemas. Este tipo de relaciones abarcaba a todo el personal científico, administrativo y de todos los niveles. El diálogo estimulante entre todos, sin barreras artificiales por razones de edad o jerarquía, ayudó no poco al desarrollo de los jóvenes.

Al mismo tiempo se afianzaba un clima de compromiso moral con el Instituto y de comprensión del papel social de la Universidad, que daba permanencia y estabilidad a pesar de otras solicitaciones atrayentes, tanto de dentro como de fuera del país.

El haber logrado estos propósitos fue sin duda un factor muy importante del éxito de la empresa.

7. *Integración regional*

Más allá de la continuidad de las relaciones rioplatenses ya referidas, Laguardia promovió, con el apoyo de UNESCO, la realización de tres reuniones sobre *Algunos problemas matemáticos que se están estudiando en América Latina*, a las que llegaron a concurrir matemáticos de 10 países y que, sin duda, tuvieron resultados muy positivos.

En la década de los 40 el IME era una institución extremadamente rudimentaria y modesta. Trabajábamos allí regularmente sólo Laguardia y yo; durante los largos períodos en que uno u otro estudiaba en los EEUU, quedaba uno solo a cargo de todo el trabajo. Las tareas de Secretaria y Bibliotecaria las desempeñaba la sra. de Laguardia. Todo el personal era estrictamente honorario. El local era una gran salón en el 2o. piso del edificio viejo de la Facultad, en el que se logró separar dos "boxes" con tabiques de madera; en determinadas ocasiones el salón se "llovía" por filtraciones del piso superior. En ese lugar se realizaban, no obstante, trabajos científicos y de organización, se dictaban cursos y cursillos sobre muy variados temas, a cargo de nosotros mismos y de miembros del grupo inicial ya mencionado, incluso uno de Lógica Simbólica a cargo del Profesor J. Kon, polaco radicado en Montevideo desde hacía varios años. La Facultad asignó una partida anual para gastos de 50 pesos (unos 50 dólares); sólo al cabo de varios años se dio a los dos docentes un pequeño complemento de sus sueldos como retribución por su trabajo en el IME. Recién en 1949 se empezaron a crear cargos rentados y algunas partidas para gastos de funcionamiento.

Pese a esas carencias iniciales y gracias a su justa orientación, a una dirección inteligente y laboriosa y a un esfuerzo intenso, sostenido y capaz de su personal, el IME se desarrolló exitosamente en las primeras tres décadas de su existencia. Fueron surgiendo sucesivas y cada vez más numerosas "generaciones" de matemáticos, en un proceso continuado de crecimiento. Para dar una referencia concreta, entre 1960 y 1965 su personal estaba formado por 8 profesores de alto nivel que, en ese lapso, publicaron unos 50 trabajos en revistas internacionales reconocidas y en las publicaciones de Instituto, que adquirieron prestigio en el mundo. La vida del IME era muy intensa y activa: decenas de jóvenes participaban de uno u otro modo en su actividad; dieron cursillos y cursos en él

alunas decenas de profesores visitantes –entre ellos, matemáticos de la talla de A. Zygmund, L.Schwartz, P.R.Halmos, A.Denjoy, W.Ambrose, etc–, becarios argentinos y brasileños concurrieron a especializarse en él; se llevaron a cabo numerosos Coloquios –no menos de 50 entre 1951 y 1958–. Esa labor fue abruptamente interrumpida por la intervención de la dictadura de 1973, que se ensañó muy particularmente contra el IME, su cuerpo docente, sus instalaciones, su biblioteca y hemeroteca especializados, interrumpió totalmente su actividad científica e incluso clausuró sus locales durante varios años.

En 1945 se creó en la Universidad la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHC). Laguardia y yo discrepamos con aspectos esenciales de su concepción y luchamos por modificarla, pero no tuvimos éxito en esa empresa. Pese a ello, y dado que la FHC tenía el mérito de ser, por primera vez en la historia de la Universidad, una Facultad no estrechamente profesionalista, que se proponía cultivar las ciencias básicas y desarrollar la investigación, colaboramos activamente en su desarrollo, aunque el centro de nuestra actividad y preocupación seguía siendo el IME. En 1950 elaboramos un plan de estudios de Licenciatura en Matemática que fue aprobado y sigue vigente hasta hoy, creándose así, por primera vez en la Universidad, una carrera universitaria de nivel terciario en nuestra disciplina. El plan era muy flexible y equilibrado y buscaba integrar el ámbito matemático de la Facultad de Ingeniería con el de la FHC; algunos de los cursos matemáticos iniciales y obligatorios de la Licenciatura, así como algunos de materias afines en que se aplicaba la matemática eran cursos curriculares básicos de Ingeniería (lo que no obstaba al acceso a la Licenciatura de alumnos que no pertenecían propiamente a esta Facultad, ni se proponían graduarse como ingenieros). Cursos más avanzados de matemática eran, en realidad, de nivel de postgrado (y en el Plan de la Maestría, del que luego hablaremos, se contempla incluso la posibilidad de que se les acepte como pertenecientes a la Maestría). Este esquema permitió abrir un canal de acceso a quienes tenían vocación matemática, aunque la Facultad de Ingeniería sigue siendo y presumiblemente continuará siéndolo en el futuro, una importante vía de canalización de jóvenes dotados para la matemática.

Durante la intervención y pese a que el cuerpo docente no era calificado, la Licenciatura de la FHC se transformó en el principal centro de estudios matemáticos de la Universidad y su alumnado se hizo mucho más numeroso que antes de 1973. Después de 1985, el Departamento de Matemática de la FHC incorporó varios docentes de alta calificación, casi todos provenientes del viejo IME, y la Licenciatura se ha convertido en una carrera consolidada y estable, que constituye una excelente etapa de nivel universitario en la formación de jóvenes matemáticos.

En el período de la dictadura, la mayor parte de los viejos docentes del IME y muchos de los jóvenes que lo frecuentaban y estudiaban en él emigraron a diversos países de América Latina, a Estados Unidos, Canadá y Europa. Los de mayor formación ocuparon altos cargos de docencia e investigación en muchas Universidades e Institutos Superiores, dando una nueva demostración de su alta capacitación, al mismo tiempo que profundizaban sus estudios y desarrollaban sus dotes de investigadores. Los más jóvenes siguieron estudios de postgrado en el extranjero; no pocos de ellos son hoy investigado-

res de alto nivel. Algunos de los que no emigraron, tuvieron la oportunidad de hacer estadías de estudio en el extranjero o de avanzar en su formación, aun en las deficientes condiciones que se daban entonces en el Uruguay.

Recuperada la democracia, se dieron así las siguientes situaciones:

1) El desarrollo del Departamento de Matemática de la FHC.

2) Los esfuerzos por restablecer un funcionamiento adecuado del IME, sobre la base de viejos docentes reincorporados, varios de ellos retornados del exterior. Se estimuló y guió, en la medida de lo posible, el estudio y la formación de muchos docentes de matemática de la Facultad, jóvenes y muy jóvenes, varios de los cuales son, al mismo tiempo, estudiantes de la Licenciatura y, se incorporó a muchos de éstos a cargos docentes en Ingeniería. Entre estos jóvenes hay no pocos que evidencian excelentes condiciones matemáticas y aparecen como retoños de futuras novísimas generaciones de investigadores.

Al mismo tiempo, se ha avanzado en la recuperación de la biblioteca y la hemeroteca especializada, por medio de compras de libros y suscripciones a revistas, donaciones solidarias de material bibliográfico por parte de matemáticos uruguayos y extranjeros y de instituciones de otros países. También se ha avanzado en la consolidación y formación de personal administrativo, en la recuperación y mejoramiento de las condiciones locativas, etc.

3. El lanzamiento del Proyecto de Desarrollo de Ciencias Básicas (PEDECIBA) patrocinado por la UNESCO y el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD), y financiado por éste, el gobierno uruguayo y la Universidad de la República, que se concretó en un convenio firmado en 1986 entre el gobierno, la Universidad y el PNUD.

En realidad, el proyecto había comenzado ya en 1984, todavía bajo la dictadura, con diversos apoyos a la formación de jóvenes, principalmente gracias a becas financiadas por el Plan de Acciones Piloto (PAP), y con la realización en Montevideo, en diciembre de ese año, de una amplia asamblea de científicos uruguayos residentes en el país o que todavía permanecían exiliados, en que se discutieron los lineamientos fundamentales del PEDECIBA. Este comprende cinco "áreas": matemática, informática, física, química y biología; en esta última juega un papel importante el ya mencionado IIBCE. El gobierno uruguayo y el PNUD suministran fondos para el programa y la Universidad aporta la gran mayoría del personal científico, cuyos sueldos paga, así como bibliotecas, hemerotecas y laboratorios, locales, etc. La Comunidad Económica Europea (CEE) brinda indirectamente un sustancial apoyo a través de su Programa para la Repatriación y también financiando proyectos específicos de investigación en que trabajan científicos del PEDECIBA. Otros países prestan asimismo importante colaboración. El PEDECIBA aspira a una proyección regional de su actividad en América Latina.

El Area de Matemática (AM) del PEDECIBA, en particular, es una importante palanca para la reconstrucción de la matemática uruguaya, haciendo posible la repatriación de varios matemáticos exiliados, financiando gran parte de la infraestructura bibliográfica y administrativa, becas internas y externas, visitas de matemáticos extranjeros, etc.

4. La creación, en 1987, del Centro de Matemática (CM) de la Universidad de la Re-

pública, que gira en la órbita de su Rectorado y del Consejo Directivo Central, ha venido a plasmar, en nuestra disciplina, ideas y planes de reestructura universitaria promovidos desde hace algunas décadas por universitarios como Laguardia, el ex-Rector O.J. Maggiolo y muchos otros científicos. El CM se propone concentrar, en torno a la investigación y al desarrollo de planes de postgrado (Maestría y Doctorado), la actividad de todos los matemáticos de alto nivel de la Universidad, y de los Licenciados y docentes de preparación equivalente en torno a los postgrados y a la iniciación en tareas de investigación. El CM y el AM–PEDECIBA son prácticamente coextensivos, y los títulos que otorguen, equivalentes.

El complejo de instituciones, en verdad algo intrincado, formado por el IME, el DM-FHC, el AM-PEDECIBA y el CM, constituyen, a un tiempo, una continuación y una superación del proceso de formación y desarrollo de la escuela uruguaya de matemática que hemos intentado reseñar. Sin duda, la experiencia y el tiempo irán decantando, perfeccionando y simplificando estos mecanismos y ello augura un extenso y profundo enriquecimiento de su integración y de la amplitud de sus actividades.

1) Me ha sido muy útil, a estos fines, un interesante artículo de Arocena y Pérez Iribarren, 1986.
2) En el período de la dictadura, que asoló al Uruguay entre 1973 y 1985, y particularmente por la obra nefasta de la intervención de la Universidad, que se ensañó de modo salvaje con la Facultad de Ingeniería, con su Decano, Ing. Don Julio Ricaldoni, sus profesores y sus instalaciones académicas, la Biblioteca sufrió graves daños. Se suprimieron las adquisiciones de libros especializados y las suscripciones a numerosas publicaciones periódicas. Desde 1985 nos hemos esforzado por colmar las carencias que se produjeron en ambos aspectos, especialmente en las colecciones de revistas que teníamos completas hasta 1973, pese a que los recursos entregados por el Estado a la Universidad y a la Facultad son muy inferiores, absoluta y relativamente, a aquellos de que disponíamos antes del golpe de Estado.
3) La Enseñanza Secundaria de aquella época comprendía un total de 6 años de estudios; los cuatro primeros tenían programas idénticos para todos los estudiantes liceales; en cambio, los dos últimos –la Sección Preparatorios– estaban diferenciados según la carrera universitaria que el estudiante se proponía seguir. En particular los Preparatorios para Ingeniería incluían una parte importante de cursos de matemática (Algebra y Análisis, Geometría Proyectiva y Geometría Descriptiva) de muy buen nivel. Este esquema se mantuvo durante varias décadas, aunque ya a fines de los años 30 toda la Enseñanza Secundaria, incluida la Sección Preparatorios, dejó de depender de la Universidad.
4) Ver F. Arocena y G. Pérez Iribarren, página 75.

REFERENCIAS

Arocena, R. y Pérez Iribarren, G. (1986): "Matemática", en el libro *Ciencia y Tecnología en el Uruguay*, MEC–INVE, Montevideo, págs. 71-94.

Collar, M. (1937): *Aritmética Abstracta* Bol. Fac. Ingeniería, págs. 151-157 y 203-210.

García de Zúñiga, E. (1925): *Rafael Barrett, matemático*, Bol. Fac. Ingeniería, págs. 30-32.

———————, (1932): *Curso de Algebra Superior y Análisis*, Montevideo.

———————, (1928): Nota sobre el Wronskiano| *Rev. de Ingeniería*, págs. 690-694.

Eduardo García de Zúñiga

Algunos aspectos de su personalidad *

Rafael Laguardia

El 2 de abril de 1951, a los 83 años de edad, falleció en su apacible retiro de Progreso, el Ingeniero Eduardo García de Zúñiga, una de las más respetables, completas y brillantes individualidades que hayan actuado en nuestras esferas administrativa, profesional y docente.

Nacido en Montevideo el 30 de setiembre de 1867; realizó sus estudios secundarios y superiores en nuestro país. Perteneció a la primera promoción de ingenieros nacionales, graduándose en 1892 con una tesis sobre "Un viaducto metálico".

En su larga y fecunda carrera administrativa se señaló por su capacidad para abordar y resolver difíciles problemas técnicos de la índole más diversa. Actuó en el Departamento Nacional de Ingenieros, en las Inspecciones Técnicas Regionales, en la Inspección General de Ferrocarriles del Norte del Río Negro; fue sucesivamente Director de Vialidad, Director de la Administración Nacional de Puertos y Director de Ferrocarriles.

Paralelamente desarrolló una notable labor docente como profesor de matemática en la Facultad de Ingeniería, donde desempeñó las cátedras de Algebra Superior y Análisis y de Cálculo Infinitesimal, y además en la Facultad de Ciencias Económicas, donde enseñó Cálculo Mercantil y Financiero. Ocupó importantes posiciones en el gobierno de la Universidad, habiendo formado parte de los Consejos Directivos de las Facultades de Ingeniería y de Humanidades y Ciencias y habiendo sido Decano de la primera durante tres períodos.

Fue designado *Profesor ad-honorem* de la Facultad de Ingeniería y Doctor *honoris-causa* de la Universidad.

Fuera de la esfera oficial dedicó no pocas energías a impulsar los estudios desinteresados, principalmente desde la presidencia del Instituto de Estudios Superiores, que desempeñó en forma continuada desde poco después de fundarse esta institución.

Sus publicaciones pueden clasificarse en dos grupos según que se refieran a Ingeniería o a Matemática. A continuación damos una lista de unas y otras, comentando brevemente algunas del segundo grupo.

SOBRE INGENIERIA

Sobre un viaducto metálico. Tesis. Año 1892. Anales de la Universidad. Vol. 3, 1893, pp. 767-828.

Sobre Organización y Administración de Puertos. Memoria presentada al Ministerio de Fomento. Reseñada en la Revista de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos del Uruguay. Vol. 2, 1908, pp. 161-62.

Proyecto de ampliación del Puerto de Montevideo. Revista de la Asoc. de Ing. y Arq. del Uruguay. Vol. 6, 1912, pp. 39-43.

Transportadores aéreos en el interior de los depósitos del Puerto de Montevideo. Revista de la Asociación Politécnica del Uruguay. Vol. 10, 1916, pp. 16-22.

Informe sobre transporte de ganado. Revista del Ministerio de Industrias, Montevideo, 1917.

* Tomado de la *Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias* (No. 7 - diciembre 1951)

Supresión de pasajes a nivel. Congreso Nacional de Ingeniería, Montevideo, 1930, pp. 114-121.

Sobre coordinación de transportes. Revista de Ingeniería. Vol. 32, 1938, pp. 33-34. Conferencia a propósito de un proyecto de Ley, al que se opone por entender que tiende a evitar la competencia que el transporte por carreteras hacía a las empresas ferroviarias extranjeras.

Historia del Puerto de Montevideo. Primera parte: Desde la época colonial hasta 1887, por el Dr. J. M. Fernández Saldaña, 157 pp. Segunda parte: Desde 1887 hasta 1931, por el Ing. Eduardo García de Zúñiga. 159 pp. Editado por la Administración Nacional de Puertos, Montevideo, 1939.

Política de los Ferrocarriles en el Uruguay. Conferencia pronunciada en la Escuela Superior de Guerra el 28 de mayo de 1939. Folleto de 24 pp. editado por la Escuela Superior de Guerra. Imprenta Militar, Montevideo, 1939.

El Ferrocarril de Sarandí del Norte. Reseña descriptiva. Boletín del Congreso Sud-Americano de Ferrocarriles, 1939.

SOBRE MATEMATICA

Nota sobre la medición de una distancia horizontal aplicando las propiedades de la catenaria. Revista de la Asociación de Ingenieros y Arquitectos del Uruguay. Vol. 1, 1907, pp. 92-93.

Reseña bibliográfica sobre el trabajo de Enrique Legrand, *Sumaciones por la fórmula de Euler*. Revista de la Asoc. de Ing. y Arq. del Uruguay. Vol. 5, 1911, p. 104.

Estudio sobre programas de matemática preparatorias y superiores. Revista de la Asociación Politécnica del Uruguay. Vol. 8, 1914, pp. 97-120. Después de estudiar la importancia de la matemática en la formación espiritual y destacar el valor de sus aplicaciones prácticas, presenta un conjunto de programas que por su orientación moderna han influido en forma decisiva en los estudios de matemática pura y aplicada en nuestro país. Trabajo muy interesante, con finas observaciones acerca del medio en que le tocó actuar.

Historia de las Matemáticas. Serie de conferencias dictadas en la Facultad de Ingeniería y publicadas las tres primeras en la Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería, Montevideo, 1924, 1925, 1928, 1929, y las tres últimas en la Revista de Ingeniería, Montevideo, 1932, 1934, 1935.

Nota sobre el wronskiano. Revista de Ingeniería, Montevideo, Vol. 22, 1928, pp. 690-94. En esta breve nota, inspirada sin duda en sus clases de Cálculo Infinitesimal, da una demostración original, por inducción, muy clara y directa, de que la fórmula, debida a Euler, que presenta la integral general de una ecuación diferencial lineal homogénea y con coeficientes constantes como una combinación lineal de monomios de la forma x^{p} c^{rx}, donde r y p satisfacen determinadas condiciones, permite resolver siempre el problema de valores iniciales. Es interesante dar aquí las opiniones de dos conocidos matemáticos europeos, G. Fubini y G. Peano, que transcribo de una comunicación del Agrimensor H. Colombo, Cónsul del Uruguay en Turín, quien representó a nuestro país en el Congreso Internacional de Matemáticos realizado en 1929 en la ciudad de Bologna. La opinión de Fubini es la siguiente:

"V. S. me pide mi opinión sobre el trabajo del Ingeniero García de Zúñiga. Se compone de dos partes. La primera es una sencilla y clara demostración de un teorema conocido. La demostración es nueva aunque el método empleado no lo es, pues

ha sido utilizado muchas veces para cuestiones análogas. La segunda parte es una demostración menos complicada que las usuales de un caso particular de un teorema muy conocido. De todas maneras es un interesante trabajo matemático que evidencia el espíritu analítico de su autor" (Firmado) *Guido Fubini*.

He aquí ahora la opinión de Peano.

"Trabajo interesante, minucioso y claro sobre un problema estudiado por los matemáticos con singular predilección. La demostración que ofrece el Ing. García de Zúñiga, analizador perfecto, me demuestra que desde el otro lado del Océano la matemática pura tiene sus admiradores, lo cual no hace más que corroborar las manifestaciones que V. S. nos ofreció en el Congreso Internacional de Matemáticos. Me agradaría seguir recibiendo estudios semejantes sobre temas análogos. (Firmado) *G. Peano*".

Nota sobre el teorema de Bézout. Revista de Ingeniería, Montevideo. Vol. 26, 1932, pp. 3-4. Breve nota que tiene por objeto completar y precisar una demostración.

Curso de Algebra Superior y Análisis. Primeras Lecciones de Análisis Matemático (Apuntes de Clase). Facultad de Ingeniería, Montevideo. 1932, 137 pp. En esta obra desarrolla la teoría del número real debida a Cantor, da algunas nociones sobre conjuntos de números, estudia los trascendentes de Liouville, desarrolla la teoría de las series numéricas, da algunas nociones sobre funciones reales (en particular los teoremas de Weierstrass sobre funciones continuas), expone las principales propiedades de las series funcionales y termina estudiando la famosa función contínua no diferenciable de Weierstrass. Es una obra breve, clara, amena y rigurosa, que muestra hasta qué grado de perfección estética supo llevar un curso que dictaba en una Facultad profesional.

Descomposición de una fracción racional. Matemática Elemental, 1934.

Rafael Barrett, matemático. Boletín de la Facultad de Ingeniería. Vol. 1, 1935, pp. 30-32. La adquisición, por la Biblioteca de esa Facultad, de algunos manuscritos de Rafael Barrett "permite valorar concretamente su producción, o por lo menos su vocación matemática, a lo que suele aludirse con demasiada vaguedad y sin ningún conocimiento concreto de los hechos". Se refiere sobre todo a una carta dirigida a H. Poincaré, en la que Barrett indica una fórmula que da el número de primos menores que un número dado. García de Zúñiga declara que estima altamente el talento matemático de Barrett y que cree que "si la brevedad de su vida, sus enfermedades, su pobreza y la intensa producción literaria de sus últimos años le hubieran permitido consagrar más tiempo a la investigación matemática, Rafael Barrett hubiera ilustrado también su nombre en esta ciencia, que amaba tanto, con valiosos descubrimientos".

Lección inaugural del Curso de Cálculo de Probabilidades. Boletín de la Facultad de Ingeniería, Vol. 1, 1935, pp. 213-219. El nuevo plan de estudios de la Facultad incluía un cursillo de Cálculo de Probabilidades. En esta primera lección hace una breve reseña del desarrollo histórico y filosófico del concepto de probabilidad.

Isaac Newton. Selección. Ordenada y traducida por Eduardo García de Zúñiga y J. Novo Cerro. Colección Austral No. 334, Espasa Calpe, Buenos Aires, 1943, 153 pp.

Además de las obras mencionadas en los dos grupos precedentes, publicó en su carácter de bibliotecario honorario, el *Catálogo de la Biblioteca de la Facultad de Matemáticas*. Montevideo, 1912, donde por primera vez se utiliza en nuestras bibliotecas públicas la clasificación decimal.

Sería injusto limitarse a la enumeración precedente porque no da cuenta cabal de

su personalidad. En lo físico: fuerte, vigoroso y gallardo. En lo moral: bueno, franco, generoso y sencillo. Además, tolerante y comprensivo. Su cultura: vasta y profunda, no sólo en ingeniería y en matemática, sino también en las humanidades, que cultivó con íntimo y acendrado deleite hasta sus últimos días. Una individualidad tan completa, potente y avasalladora tenía que inspirar simpatía o, por lo menos, respeto. Gracias a ello pudo aportar a los problemas, aun en medios a veces indiferentes o incomprensivos, no ya la solución estrecha que busca allanar la dificultad inmediata, sino la que se inspira en perspectivas lejanas y abre cauces al futuro. Así, por ejemplo, al frente de la biblioteca de la Facultad de Ingeniería, no se dejó desbordar por los que deseaban llenar los anaqueles con la multitud incoherente de los textos que se repiten los unos a los otros o exageran la última novedad técnica, a veces pronto olvidada, sino que planteó y llevó a cabo una política de adquisiciones en la que dio a las novedades su real importancia, pero no descuidó las obras básicas, las colecciones de revistas científicas y las producciones de los grandes investigadores. Gracias a él aquella biblioteca atesora obras de gran valor, particularmente en el dominio de la matemática y de la historia de la ciencia. Las importantes colecciones de periódicos matemáticos que con certera previsión hizo adquirir, desoyendo a los escépticos, son hoy consultadas diariamente por los profesores que le sucedieron en sus cátedras y por jóvenes estudiosos e investigadores en cuyas manos son un instrumento imprescindible.

Dejemos a otros que, con mejor conocimiento que nosotros, valoren su obra de ingeniero. Pero un deber de gratitud a quien tanto hizo por impulsar los estudios matemáticos en nuestro país nos mueve a esbozar una justa valoración de su actuación como matemático. La variedad de sus inquietudes intelectuales y la multitud de sus importantes tareas al servicio del Estado que, nos consta, ejerció con profundo desinterés por lo material, no le permitieron dedicar a la investigación matemática, para la que estaba tan bien dotado, las largas horas de esfuerzo continuado que ella exige. No obstante, quienes no hayan sido sus alumnos o no hayan disfrutado de su trato, encontrarán en su *Nota sobre el wronskiano*, su *Curso de Algebra Superior y Análisis*, su *Estudio sobre Programas*, y otras publicaciones muestras de su espíritu lógico, agudo, penetrante y riguroso, así como de su elegancia y claridad en la exposición. Como profesor sacrificó a veces la utilidad a la belleza, pero se caracterizó por la jerarquía de sus clases, a las que situó a un nivel, imprimió una seriedad y un rigor, y animó con un acento de modernidad que, a pesar de los vaivenes de planes y programas, pueden considerarse conquistas definitivas en nuestro medio.

LECCIONES DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

Eduardo García de Zúñiga

1. INTRODUCCION HISTORICA

El intento de dar en unas cuantas conferencias una idea de la Historia de las Matemáticas me hubiera parecido demasiado presuntuoso, y hubiera renunciado a realizarlo, si, además de contar por anticipado con toda la indulgencia de mi auditorio, no hubiera empezado por reducir mi programa a las proporciones más modestas. El plan que pienso seguir no es en manera alguna el de un curso completo. Para tan ambicioso propósito nos faltaría, a mi competencia, y paciencia a Vds. Ni siquiera me comprometo a desarrollar el vastísimo tema con método continuadamente cronológico. Sólo me ocuparé con algún detalle de las épocas de mayor esplendor científico, haciendo desde ellas, cuando lo crea oportuno, excursiones o divagaciones a través del tiempo.

De estas grandes épocas, dos me parecen dominar como altísimas cumbres toda la perspectiva histórica de las Matemáticas: la Epoca Alejandrina en el tercer siglo antes de nuestra era, con Euclides, Arquímedes y Apolonio, y el corto pero fecundísimo período en que brillaron los genios incomparables de Pascal, Descartes y Fermat, Newton y Leibiniz. Alrededor de esos grandes nombres agruparemos los de aquellos sabios a quienes cupo el rol más modesto de precursores o continuadores, y llegaremos en fin a los contemporáneos, entre los cuales no escasean ciertamente los genios extraordinarios, pero cuya influencia en la evolución de las Matemáticas sería difícil y temerario anticipar.

El origen de las nociones primordiales de la Geometría y de la Aritmética, ofrece indudablemente un profundo interés para el filósofo y para el pedagogo, pero esos primeros balbuceos de la infancia de la humanidad están demasiado lejos de los períodos florecientes de su vida cultural para que podemos dedicarles, dentro del plan que hemos adoptado, más que una brevísima referencia. Desde los tiempos más remotos, las exigencias del Comercio y de la Navegación, impusieron a algunos pueblos, a los Fenicios principalmente, el estudio práctico de las verdades más elementales de la Aritmética. La Agricultura, ocupación y fuente de riqueza preferida en otros pueblos, y especialmente en Egipto, obligaba a resolver siquiera de un modo aproximado y empírico, algunos problemas geométricos de medición y división de figuras más o menos sencillas y regulares. Así nacieron las dos grandes ramas de las Matemáticas prácticas.

Uno de los más antiguos monumentos del saber matemático de los Egipcios es el célebre papiro de la colección Rhind, conservado en el Museo Británico. Hace pocos meses la Universidad de Liverpool ha editado una lujosa transcripción de ese admirable documento, con traducción y comentario del profesor T. Eric Peet, trabajo el más completo que se ha publicado hasta ahora sobre el particular.

Este curiosísimo manual de los conocimientos matemáticos, viejo de más de tres mil años, contiene los cuadrados de los números, las progresiones aritméticas y geométricas, la solución de algunos problemas de suma y multiplicación de fracciones sencillas, la expresión aproximada de áreas y volúmenes de figuras elementales y la avaluación del número π con un error equivalente a dos unidades en la segunda cifra decimal. En resumen: unos pocos resultados particulares y empíricos, sin rastros de demostración ni generalización.

2. LOS COMIENZOS EN GRECIA: TALES Y LA ESCUELA PITAGORICA

La Matemática griega de la que vamos ya a ocuparnos, se distingue en cambio, desde su origen, por su carácter deductivo y científico que la separa y la independiza casi completamente de la producción anterior. En esto, como en todo, el espíritu griego ha sido creador por excelencia.

El primer período de la Historia Matemática en Grecia se extiende desde Tales de Mileto (uno de los llamados Siete Sabios de Grecia) que floreció hacia el año 600 a.C. hasta el desmembramiento del imperio de Alejandro a su muerte (año 323 a.C.).

Ese período abraza por consiguiente, unos tres siglos. Es una época de producción aislada y fragmentaria, pero probablemente muy fecunda, puesto que permitió la realización de la obra metódica y completa de Euclides, la cual sería inexplicable sin la existencia previa de una masa considerable de descubrimientos importantes.

Daremos una rápida ojeada a lo largo de esos tres siglos de labor diseminada y preparatoria, –poco conocida además, pues las obras originales se han perdido, y lo que es infinitamente lamentable, se ha perdido también la Historia de las Matemáticas escrita por Eudoxio de Rodas, discípulo inmediato de Aristóteles y contemporáneo por lo tanto, de los últimos sabios de este período.

Para formarse una idea del atraso de la Geometría, como ciencia deductiva, en la época de Tales, baste decir que los únicos descubrimientos que le atribuye Proclo (412-485), –célebre comentarista de Euclides–, se reducen a haber demostrado que el diámetro divide al círculo en parte iguales, que los ángulos de la base en un triángulo isósceles son iguales entre sí, y que los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma abertura. Se le atribuye también el teorema que constituye la proposición 31 del III libro de Euclides: *el ángulo inscripto en la circunferencia y subtendido por un diámetro es un ángulo recto*. Este teorema se miró por mucho tiempo como uno de los más hermosos de la Geometría y a él alude el Dante (canto XIII, 101 y 102 del Paraíso).

O se del mezzo cerchio far si puote
Triangol si ch'un retto non avesse.

La actividad científica del sabio de Mileto fue de las más variadas. Distinguióse como filósofo y como astrónomo. De él se cuentan numerosas anécdotas. Sin prestar mucha fé a su autenticidad, repetiré algunas de ellas, acogidas por Rouse Ball en su Historia de las Matemáticas.

Tales era no sólo un sabio eminente sino también un sagaz hombre de negocios. Habiendo previsto cierta vez una cosecha excepcional de aceitunas hizo alquilar por su cuenta todos los molinos de aceite de la región, logrando así imponer a los agricultores, con gran provecho suyo, las condiciones que quiso, y dando el primer ejemplo histórico de una de las más odiosas prácticas del comercio moderno.

Conduciendo otra vez un cargamento de sal a lomo de mulo, una de las acémilas resbaló al atravesar un arroyo, cuya agua fundió en parte la mercancía; el animal sintió el alivio y, al llegar al primer vado, se apresuró a bañar de nuevo su molesto fardo: Tales puso eficaz remedio al ardid de su bestia cargándola de esponjas.

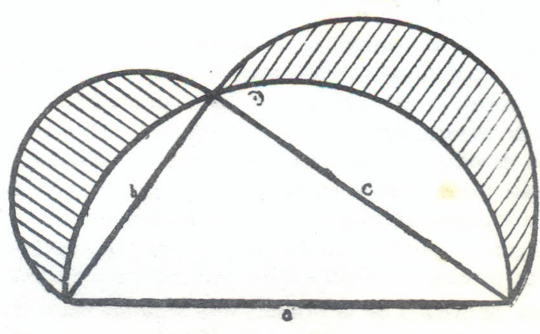
Menos vulgar y más digna del sabio es la anécdota que nos lo muestra paseándose de

noche por el campo, absorto en la contemplación de las estrellas y cayendo inadvertidamente dentro de una zanja, lo que provoca esta exclamación de una vieja, testigo irónico del accidente: "¿Y eres tú quien pretende enseñarnos lo que pasa en el cielo, cuando no ves siquiera lo que se halla a tus pies?".

Después de Tales, padre de la Geometría, Pitágoras, matemático y filósofo como él es la primera figura considerable que se nos presenta entre los precursores de Euclides. He aquí algunos datos probables de su biografía: En su primera juventud (había nacido hacia el año 570 antes de nuestra Era, es decir unos veinte años antes de la muerte de Tales), conoció al sabio de Mileto, pero sin incorporarse a su escuela. Después de viajar por Egipto y de profesar algún tiempo en Samos, lugar de su nacimiento, emigró a la Magna Grecia, como se llamaba entonces a la parte meridional de la península itálica colonizada por los griegos, y, primero en Tarento y luego en Crotona, reunió a su alrededor una multitud de jóvenes estudiosos a los que agrupaba en dos clases: los auditores y los matemáticos. Se pasaba de la primera a la segunda clase tras un período de iniciación que duraba tres años. Los iniciados, **los Pitagóricos**, constituían una especie de hermandad o sociedad secreta cuyos miembros poseían todos sus bienes en común, profesaban idénticas creencias filosóficas y se comprometían a no revelar a los profanos las enseñanzas de la escuela. El símbolo que empleaban para reconocerse era el **Pentagrama** o pentágono regular estrellado, al que siempre se han atribuído misteriosas virtudes, especialmente la de ahuyentar al Espíritu maléfico. *(Das Pentagramma macht dir Pein?* pregunta Fausto a Mefistófeles en la escena del Gabinete de Estudio).

Aunque es difícil desentrañar la parte personal de Pitágoras en los trabajos comunes de su Escuela, sus principales contribuciones a la Aritmética, despojadas de la espesa niebla de misticismo que las envuelve, parecen referirse a los números poligonales, las razones y proporciones, la sumación de las series de números enteros crecientes, y al estudio de algunas propiedades de los irracionales. Por lo demás, cediendo a la tendencia predominante de la mentalidad griega, estas cuestiones eran tratadas empleando preferentemente métodos geométricos. En cuanto a la Geometría propiamente dicha, la obra pitagórica fue de un carácter más fundamental y completo, si hemos de prestar fe a las palabras de Proclo, que atribuye a Pitágoras el mérito de haber elevado la Geometría al rango de una ciencia. Fuera de esta obra de metodización científica, algunos descubrimientos geométricos importantes tienen su origen en la Escuela pitagórica; la construcción de los poliedros regulares, la proposición relativa a la suma de los ángulos de un triángulo y en fin la que lleva todavía el nombre de Pitágoras. La demostración original no se conoce, pues la que figura en los Elementos de Euclides (al final del I libro), y que es la que reproducen casi todos los tratados de Geometría elemental, pertenece al gran sabio alejandrino. Este célebre teorema ha ejercido siempre un encanto particular por la sencilla belleza de su enunciado y la fecundidad extraordinaria de sus consecuencias. Así se explica que existan de él no menos de cincuenta demostraciones diferentes, debidas algunas a simples *amateurs* de las Matemáticas, como el General Garfield, Presidente de los EEUU de Norte América en 1881 (Heath's *Mathematical Monografs, No.1) y nuestro* compatriota ilustre, el Dr. Mariano Soler (Boletín de la Sociedad de Ciencias y Artes, 1890).

De entre los sucesores de Pitágoras merece destacarse Hipócrates de Chio (V siglo a. C.) a quien se debe el primer ejemplo de cuadratura de una superficie limitada por un perímetro curvo (meniscos o lúnulas de Hipócrates).



1.º **area del triángulo:** $\frac{bc}{2}$

2.º » » **semi circulo sobre** *b*: $\frac{\pi b^2}{8}$

3.º » » » » » *c*: $\frac{\pi c^2}{8}$

Total: $\frac{bc}{2} + \frac{\pi}{2} (b^2 + c^2).$

Si sustraemos el área del semi círculo sobre *a*, nos quedará las de las dos lúnulas:

$$\frac{bc}{2} + \frac{\pi}{8} (b^2 + c^2) - \frac{\pi a^2}{8} =$$

$$\frac{bc}{2} + \frac{\pi}{8} (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{bc}{2}$$

Para concluir con la escuela de Pitágoras, mencionaremos todavía a Arquitas de Taranto (430-365 a. C.), llamado el último de los pitagóricos. La solución del famoso problema de la duplicación del cubo (problema de Delos) demuestra que por lo menos conocía las siguientes verdades geométricas: en todo triángulo rectángulo cada cateto es medio proporcional entre su proyección sobre la hipotenusa y la hipotenusa misma; la altura del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina la hipotenusa; dos cuerdas de un mismo círculo se cortan en partes inversamente proporcionales; todos los ángulos inscriptos en un mismo arco son iguales entre sí; la intersección de dos planos perpendiculares a un tercero es perpendicular a éste.

Eudoxio, discípulo de Arquitas, nació por el año 400 o 390, profesó en Atenas, formó escuela (Menecmo, inventor de las secciones cónicas y Dinostrato, que estudió la rectificación de la circunsferencia, fueron sus principales discípulos) y contribuyó con el filósofo Platón, su contemporáneo y amigo, entusiasta propulsor de la Geometría, al brillo de la enseñanza matemática en Atenas, donde floreció también en la misma época Teeteto que parece haberse ocupado preferentemente de la Geometría del espacio y haber descubierto el octoedro y el icosaedro, completando así el número de los poliedros regulares, de los cuales ya eran conocidos en la Escuela de Pitágoras el tetraedro, el exaedro y el dodecaedro.

Recapitulando lo que hemos dicho hasta ahora, debemos reconocer que, a pesar de las dotes innegables de la mentalidad griega para las investigaciones abstractas, la suma de conocimientos matemáticos en el momento de aparecer Euclides no está en relación con el adelanto filosófico, literario y artístico. Probablemente la educación matemática en las escuelas era menos completa que la de otros ramos del saber. Así parece resultar de algunos ejemplos de errores groseros que desfigura las más bellas obras de la antigüedad clásica. Moritz Cantor cita entre otros dislates el del gran historiador Tucídides, contemporáneo de Platón, que al evaluar la superficie de una isla por el tiempo necesario para circunnavegarla, presupone la proporcionalidad entre las áreas y los perímetros que las encierran.

3. LAS MATEMATICAS EN EL PERIODO ALEJANDRINO

Pero, a la muerte de Alejandro (323), es decir, muy pocos años después de la época en que actuaron los últimos geómetras recién recordados, repartido el imperio entre los principales jefes del gran conquistador, la cultura se desplazó de Atenas a Alejandría, sin dejar de ser griega por el espíritu, la lengua y la raza misma de los hombres eminentes encargados de continuar en el suelo de Egipto las nobles tradiciones científicas de sus antepasados. Y se abre entonces para las Matemáticas una era de progreso tan brillante y fecunda que ha merecido el nombre de Período aureo de la Geometría griega.
Ver llamada página 41.

3.1 EUCLIDES

De la vida de Euclides, el primero en el orden cronológico, no sabemos casi nada. Griego de nacimiento o de origen, se educó verosimilmente en Atenas, pero desarrolló toda su actividad científica en Alejandría, durante el reinado del primero de aquellos Tolomeos, sucesores directos de Alejandro, que fundaron el célebre museo o templo de las Musas, institución precursora de nuestras universidades y academias, y la no menos célebre Biblioteca. Un pasaje interpolado de la colección metemática de Pappus Alejandrino (fines del III siglo de nuestra Era) nos bosqueja el carácter de Euclides, su modestia, su bondad amiga de estimular a los principiantes, su respeto por los sabios que lo habían precedido. Estobeo (año 500 de N. E.) cuenta una anécdota reveladora de su antipatía contra los que solo siguen fines interesados en el cultivo de las ciencias: a un joven discípulo que le pregunta qué ganará con el estudio de la Geometría, Euclides le hace entregar por su esclavo unas cuantas monedas para que no siga quejándose de aprender

sin lucrar. Todos ustedes conocen su altiva réplica al rey Tolomeo: "No hay camino real para llegar a la Geometría".

A esto se reduce todo lo que sabemos del autor de los Elementos.

Felizmente, si la biografía de Euclides no ha llegado hasta nosotros, una gran parte de sus obras se conservan todavía. Fuera de los Elementos, de que hablaremos después, las otras producciones euclidianas, existentes o mencionadas por diversos escritores de la Antigüedad, son estas:

1o. *Un tratado sobre falacias o sofismas geométricos*, obra que se ha perdido totalmente. Empeñados en descubrir nuevos teoremas o resolver nuevos problemas, algunos autores, siguiendo métodos erróneos, habían llegado a conclusiones equivocadas, a pesar de tomar su punto de partida en principios verdaderos de la ciencia. La obra de Euclides parece haber sido destinada a precaver contra esos errores, mediante ejemplos de falsas deducciones.

2o. *Los Datos*. El texto íntegro con el prefacio explicativo de Marino de Meápolis (alrededor del año 500 de nuestra Era) figura en la edición completa de Euclides por Heiberg y Menge. La obra consiste en una serie de proposiciones según las cuales, si en una figura se dan ciertos elementos en magnitud, posición o forma, algunos otros elementos pueden determinarse y están por consiguiente implicítamente dados. Estos *datos* permitían reemplazar con una simple referencia la demostración o solución de las proposiciones o problemas subsidiarios que ocurren frecuentemente en el estudio de cuestiones más complejas. Citemos por vía de ejemplo la proposición que da en estilo geométrico el equivalente de la solución general de la ecuación de 2o. grado: "si dos rectas contienen un rectángulo, dado en magnitud, y si la suma de sus dos lados también está dada, cada uno de sus lados puede considerarse dado", o, en lenguaje algebraico: si se dan

$$xy = b^2 \text{ y } x + y = a, \; x \text{ y } y$$

pueden considerarse dados.

3o. *Tratado de las divisiones* (de las figuras). Perdido en griego, pero descubierto por Woepcke en un manuscrito árabe, y publicado con la traducción en 1851. Aquí se estudian, como lo indica el título, problemas de división de figuras en otras del mismo o diferente género; así un triángulo se divide en triángulos o en un triángulo y un cuadrilátero; una figura limitada por un arco de circunferencia y dos rectas trazadas desde sus extremos a un punto del plano, se divide en dos partes iguales; se separa de un círculo una fracción dada, limitada por cuerdas paralelas; etc., etc.

4o. Los tres célebres libros de *Porismos*, desgraciadamente perdidos y de los cuales sólo se conservan los fragmentos contenidos en la colección de Pappus. Lo único que se sabe con certeza de esta obra famosa es que ella versaba sobre cuestiones difíciles de Geometría superior y contenía numerosas proposiciones de la moderna Geometría proyectiva y la base de las teorías de las transversales y de la relación anarmónica.

Se han hecho varias tentativas de reconstitución de los Porismos, las más completas de las cuales se deben a Roberto Simson y al gran geómetra francés Miguel Chasles. Como ejemplos de porismos daremos, en lenguaje matemático actual, los dos siguientes:

a) Si, dados tres puntos en línea recta, se imagina que un triángulo cuyos lados pasan respectivamente por esos tres puntos, se deforma de modo que sus lados giren alrededor de dichos puntos y dos de sus vértices se muevan a lo largo de dos rectas, el tercer vértice también se moverá sobre una recta.

b) Si un $n-$ látero completo se deforma de modo que sus lados giren respectivamente alrededor de n puntos en línea recta y $n - 1$ de sus $\frac{n(n-1)}{2}$ vértices se muevan sobre otras tantas rectas, los $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ vértices restantes se moverán igualmente en línea recta, a condición de que no pueda formarse con aquellos n – 1 vértices ningún triángulo que tenga por lados, algunos del *n – látero.*

Bastará con estas referencias para comprender cuánto debemos lamentar la pérdida de los Porismos de Euclides, que por la estima en que se les tenía en la antigüedad y por lo que de ellos se conserva, justifican tal vez la aserción de Montucla en su Historia de las Matemáticas: "c'était le plus profond de tous les ouvrages d'Euclide et celui qui lui ferait le plus d'honneur s'el nous etait parvenu".

Según Pappus, había en los tres libros de Porismos 38 lemas y 171 teoremas.

5o. *Los lugares de superficie.* Esta obra también se ha perdido. De ella cita Pappus dos lemas: el primero está demasiado obscuramente expresado para permitir una interpretación probable de su sentido exacto; la segunda cita contiene el enunciado y la demostración completa de la propiedad de las directrices y los focos de las cónicas, es decir: el lugar de un punto cuya distancia a otro fijo (el foco) está en una relación dada con su distancia a una recta fija (la directriz) es una sección cónica a saber, una elipse, una parábola o una hipérbola, según la relación dada sea inferior, igual o superior a la unidad. Chasles supone que esta obra de Euclides trataba de las superficies de revolución de segundo grado y de sus secciones pero ello no pasa de una conjetura.

6o. *Las cónicas.* Este tratado de Euclides fue evidentemente suplantado por el trabajo mucho más importante de Apolonio.

7o. Finalmente, Euclides escribió sobre Astronomía y Optica dos obras, cuyo original, acompañado de la traducción latina, figura en la edición de Heiberg y Menge, y también posiblemente, sobre Música, aunque las obras que se le atribuyen sobre este último tema no parecen auténticas.

3.2 LOS ELEMENTOS DE GEOMETRIA

Vamos ahora a ocuparnos con algún detalle de los Elementos de Geometría, o, como se les ha llamado siempre abreviadamente y por antonomasia, *los Elementos.* El juicio más antiguo sobre la obra capital de Euclides figura en el comentario de Proclo al primer libro de los Elementos.

Proclo, filósofo neo-platónico, vivió del 410 al 485 de nuestra era. Más filósofo que matemático, fue sin embargo un geómetra competente, además de un profundo erudito en todas las ciencias de su época. Gracias a él y a Pappus Alejandrino, su antecesor, sabemos algo de los geómetras griegos pre-euclidianos y de Euclides mismo. Hablando de

este último, dice Proclo que "compuso sus Elementos coleccionando muchos teoremas de Eudoxio, perfeccionando otros muchos de Teeteto y sometiendo a demostración rigurosa lo que sólo había sido insuficientemente o vagamente demostrado por sus antecesores". Por lo demás, con el mismo nombre de *Elementos* existían ya diversas compilaciones, de las cuales la más antigua parece que tuvo por autor a Hipócrates de Chio, el inventor de las lúnulas, mientras que la última, utilizada en la enseñanza de la Academia, había sido escrita por un cierto Feudio de Magnesia, quien vendría a ser por lo tanto el precursor inmediato de Euclides. De ninguno de esos ensayos queda el menor rastro, fuera del nombre de sus autores. Es, sin duda basándose en las palabras de Proclo, que llega Loria a sintetizar su opinión sobre el autor de los Elementos en estas palabras: "El (Euclides) poseía una mentalidad eminentemente organizadora, que aplicó más bien a robustecer que a ampliar el edificio geométrico, prefiriendo preparar futuros cultores de la Geometría a contribuir él directamente al cultivo de esta ciencia". Con todo, no sería justo omitir que la pérdida de la más original de las obras de Euclides hace difícil pronunciarse sin reservas sobre el carácter y extensión de su talento.

Al empezar a ocuparnos de los Elementos, una primera pregunta se formula ineludible en nuestro espíritu: ¿Cómo ha llegado hasta nosotros la viejísima obra, a través de qué vicisitudes, en qué estado de pureza y autenticidad? El texto euclidiano que poseemos es completo, pero ha sufrido evidentemente numerosas alteraciones, interpolaciones y agregados. De los manuscritos existentes, entre los cuales merece mencionarse por la perfección de su escritura y su admirable conservación, el que se guarda en la Biblioteca bodleiana de Oxford y que es del año 888– toda una categoría que comprende no menos de ocho manuscritos, reproducen más o menos fielmente la redacción de Teon de Alejandría (siglo IV de nuestra era). Cuando Simson publicó en edición de 1756, en latín e inglés, anunciaba desde el título la intención de corregir los errores de Teon, u otros, y de restaurar las demostraciones de Euclides. Que Teon alteraba o completaba a veces el texto original es innegable, y él mismo lo declara; con todo, las restauraciones de Simson no podrían dejar de ser conjeturales, desde que, en su época, los manuscritos disponibles se basaban en el texto de Teon, cuyo nombre mencionaban expresamente muchos de ellos. Pero, a principios del siglo pasado, Peyrard descubrió en el Vaticano un manuscrito cuyo título no aludía, como la mayor parte de los conocidos hasta entonces, a la intervención de Teón de Alejandría, y en el que no figuraba un teorema incluido en todos ellos y cuya paternidad teoniana estaba fuera de dudas. Peyrard, que publicó en París su manuscrito acompañado de una traducción latina y otra francesa, entre los años 1814 y 1818, podía pues afirmar que en dicho manuscrito poseemos, si no el texto mismo de Euclides, una versión de él más antigua y auténtica que todas las otras conocidas. Descubrimientos posteriores de papiros antiquísimos que contienen fragmentos de la obra, y de traducciones árabes de la misma, han permitido al fin restablecer en la sabia edición de Heiberg y Menge un texto que pocas modificaciones podrá ya experimentar en el futuro.

Traducidos a todas las lenguas europeas y a algunas asiáticas (al japonés y al chino entre otras) los Elementos de Euclides, son, junto con la Biblia, la Divina Comedia y el Quijote, la obra más divulgada en el mundo. En español la traducción más antigua conocida es de 1576, en Sevilla, y contiene en un volumen in. –4o. los seis primeros libros.

Su autor, Rodrigo Zamorano, se titula Astrólogo, Matemático y Catedrático de Cosmografía. De las traducciones modernas, la publicada en inglés (1908, Cambridge) por T. L. Heath, con introducción y comentarios interesantísimos, constituye una de las más notables contribuciones al estudio de la obra de Euclides.

Este mismo sabio publicó el año 1920 el texto del I libro de los Elementos, con el doble fin de facilitar el estudio elemental del Griego y de la Geometría. Utilizaré en lo que sigue los comentarios matemáticos y filosóficos que dan subido interés y valor a esta obrita.

Euclides inicia sus elementos con una serie de proposiciones que constituyen un primer ensayo de la Axiomática de la Geometría, cuestión espinosa entre todas y que ha sido llevada recientemente a un grado extremo de lucidez y de rigor gracias a Peano, Hilbert y tantos otros. Estas proposiciones preliminares, no demostradas ni demostrables, se clasifican en tres grupos: las definiciones, los postulados y los axiomas propiamente dichos (nociones comunes o de sentido común los llama Euclides: κοιναι εννοιαι).

Estos axiomas son ciertas verdades evidentes por sí mismas que no pueden por eso mismo ser demostradas, pero que es preciso empezar por admitir (como dice Aristóteles) si se quiere aprender algo.

Estos axiomas no se aplican exclusivamente a la Geometría u a otras ciencias en particular, sino que sirven de fundamento a todos los conocimientos humanos. Ejemplo de axiomas: el primero de la lista de los Elementos, enunciado así: dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.

Aunque Aristóteles había insistido en la vanidad de toda tentativa de demostración de los axiomas, Apolonio de Perga, nada menos, "el gran Geómetra" como se le llamaba, incurrió, según Proclo, en el error imperdonable de emprender la demostración del axioma recién transcripto.

Como ejemplo de definición elijamos, por ser la más famosa y discutida, la que ocupa el cuarto lugar de la lista de Euclides, la definición de la recta. Aún exponiéndome a parecer pedante, voy a permitirme seguir sobre el texto griego la explicación de Heath. Así se darán cuenta Vds. de las dificultades que hay que vencer frecuentemente para llegar tan solo a una interpretación inteligible del texto. Euclides define la recta en once palabras, todas de uso corriente en la lengua griega:

Ευφεια γβαμμη εστιν, ητις εξ ισου τοις εφ' εαυτης σημειοις κειται.

Traducción literal: una línea recta es, cualquiera que igualmente yace (κειται) para los puntos sobre ella.

Veamos ahora la interpretación gramatical y filológica de Heath:

"Las palabras εξ ισου (de igual) se usan generalmente por Platón y Aristóteles en el sentido de *sobre un pié de igualdad*; Aristóteles habla una vez de hacer una pregunta εξ ισου, queriendo significar que su pregunta no será parcial ni tendenciosa en ningún sentido. Estos usos de la expresión sugieren la interpretación más natural en este caso. εξ ισου significaría *igualmente, uniformemente, sin inclinarse de un lado u otro*. Finalmente, las palabras en dativo τοις εφ' εαυτης σημειοις parece que deben considerarse como regidas por εξ ισου y entonces la traducción sería esta:

Una línea recta es una línea que yace uniformemente con respecto a los puntos de ella misma.

Simson sustituyó en vez de "los puntos de ella misma" las palabras "sus puntos extremos", sin duda para aclarar el significado; pero las palabras de Euclides son más generales, puesto que toman en consideración no sólo los extremos de la línea (que no existirían si la línea fuera ilimitada), sino *todos* los puntos de la línea. Lo que dice Euclides es que la recta yace o se extiende uniformemememente con respecto a dos (o a cualquier número) de los puntos situados sobre ella; lo que puede muy bien significar que, tómese la porción que se quiera de una recta entre dos puntos de ella misma, la recta no mostrará con respecto a estos puntos ninguna desigualdad o deformación hacia un lado u otro; ambos lados serán iguales, en el sentido de que, si la recta girara alrededor de los dos puntos como polos, o se invirtiera hasta colocarse en sentido contrario entre los dos puntos, ocuparía siempre la misma posición (lo que no ocurriría si presentara una desviación hacia algún lado en cualquier parte de su longitud).

Esta es la interpretación de Heath, pero está muy lejos de ser la única. Otras muchas se han propuesto, sin contar con la tesis radical que reduce las definiciones de Euclides a una simple nomenclatura. Es lo que sostiene Lambert cuando dice que "Euclides presenta sus definiciones como una nomenclatura, no haciendo otra cosa que lo que hace por ejemplo un relojero, cuando empieza la educación de un aprendiz enseñándole los nombres de las herramientas de su oficio."

De los postulados de Euclides elegiremos el 5o., el postulado de las paralelas, que hace época en la Historia de la Geometría. Euclides lo enuncia del siguiente modo: "Si una línea recta forma al caer sobre otras dos rectas ángulos interiores del mismo lado cuya suma es menor que dos rectas, las dos rectas, prolongadas indefinidamente, se encontrarán del lado sobre el cual la suma de los ángulos es menor que dos rectas".

Aunque Aristóteles dá una idea clara de lo que debe entenderse por *postulado*, no presenta, según Heath, ningún ejemplo tomado de la Geometría, ni hace alusión a ninguno de los postulados que se encuentran en los Elementos. De aquí se puede ya inferir que la formulación de dichos postulados es obra personal de Euclides. Pero hay una prueba más directa de la originalidad del postulado 5o. y es que, en un pasaje del mismo Aristóteles, se alude a cierta petición de principio que él veía en la teoría de las paralelas corriente en su tiempo. Al formular su postulado, Euclides habría pues hecho desaparecer el falso razonamiento denunciado por Aristóteles. Si se recuerdan las innumerables tentativas hechas durante más de dos mil años para demostrar el postulado, "hay que admirar el genio del hombre que llegó a la conclusión de que la hipótesis sobre la cual fundó la validez de todo su sistema de Geometría era realmente indemostrable".

Ya los contemporáneos de Euclides quisieron vanamente librarse del postulado, adoptando otra definición del paralelismo o tratando de hallar una demostración que hiciera pasar el postulado a la categoría de teorema. En los tiempos modernos la bibliografía del tema es enorme. Riccordi dedica veinte páginas in. 4o. a los títulos de monografías referentes al postulado 5o. publicadas entre los años 1607 y 1887. Y todavía en 1891, un siglo después de haber fundado Gauss la Geometría no-euclidiana, señala

Max Simon *(Uber die Entwiekelung der Elementar-Geometrie in XIX Jahrhundet*, pág. 53) tres nuevos ensayos de demostración. La posibilidad de desarrollar, libre de contradicciones, un sistema de Geometría no-euclidiana ha entrado ya incluso en la enseñanza elemental, gracias a las publicaciones de Weber y Wellstein *(Enciclopedia de las Matemáticas Elementales)* y de F. Klein *(Elementarmathematik vom höherem Standpunkt aus*, vol. II). A título de pura curiosidad indicaré una de esas demostraciones frustradas: la de Alberto Lista (1775-1848) poeta delicado, de inspiración serena y fácil, y hombre de cultura científica general. No les haré perder el tiempo exponiéndoles la demostración, necesariamente viciosa, de Lista; pueden verla en la edición española de la Geometría de P.L. Cirodde, en la nota referente al postulado de Euclides.

Pero, si la Geometría es posible teóricamente, sin necesidad de admitir el postulado 5o., ¿qué razones de orden práctico aconsejan la adopción de dicho postulado?

En primer lugar una razón experimental: el postulado de Euclides es una verdad de hecho infinitamente aproximada. Las observaciones astronómicas demuestran que, en efecto, la suma de los ángulos de un triángulo no difiere de dos rectas en un centésimo de segundo.

La segunda razón es, para emplear la expresión favorita de Poincaré, una razón de comodidad. En Geometría no-euclidiana las demostraciones se complican generalmente y se alargan en proporciones fabulosas. Basta hojear, para convencerse de ello, cualquier tratado de Geometría no-euclidiana.

La introducción a la Geometría no-euclidiana de A. Mac Leol, por ejemplo, publicada por J. Hermann, en París, es un volumen de 433 páginas.

Y bien, el penúltimo teorema del libro es este: *por tres puntos distintos no situados en línea recta pasa un plano y sólo un plano*. La crítica de este notable trabajo, aparecida en uno de los últimos números del "Bolletin des Sciences Mathématiques", concluye con esta reflexión maliciosa: "Ya se ve a qué decepción se expondría el lector que buscaba en esta obra informaciones nuevas (en el sentido vulgar de la palabra) sobre las propiedades del espacio".

¿Quiere esto decir que las investigaciones de Geometría no-euclidiana sean inútiles? De ningún modo. Aún descontando su interés abstracto, es un hecho que algunas verdades geométricas pueden demostrarse con relativa facilidad aplicando los resultados de las nuevas Geometrías.

Volviendo a los Elementos: después de las definiciones, postulados y axiomas, se entra de lleno en las proposiciones y problemas. Euclides emplea en su obra todos los métodos generales conocidos: análisis y síntesis, demostraciones directas y por reducción al absurdo, etc.

Conturat señala (*Les Principes des Mathématiques*, pág. 36) un modo de razonamiento empleado por Euclides e ignorado por la Lógica clásica.

(Prop. 12 del libro IX) y que puede enunciarse diciendo que "si la negativa de una proposición implica esta proposición, la proposición misma es verdadera": modo de razonamiento paradojal que solo la Logística explica y justifica.

3.3. – ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Vamos a ocuparnos hoy de uno de los personajes históricos más extraordinarios: genio matemático apenas igualado por Newton, creador de métodos originales que condujeron al descubrimiento de una parte del Análisis Superior, inventor de ciencias nuevas cuyos principios estableció en forma definitiva, estratega, ingeniero, astrónomo, y hasta versificador en sus ratos de ocio.

Arquímedes era natural de Siracusa, la antigua colonia fundada por los dorios y la más floreciente de las ciudades de Sicilia. Era pues, con toda probabilidad, de origen griego, como lo evidencia también la misma etimología de su nombre. Un cierto Heraclides había escrito su vida; pero esta obra se ha perdido, y, para reconstituir algunos datos biográficos esenciales, hay que recurrir a diversas fuentes. Según Tzetzes, poeta bizantino del siglo XII, Arquímedes murió a la edad de setenta y cinco años, y como es un hecho histórico bien comprobado que pereció durante el saqueo de Siracusa por los romanos en –212, su nacimiento debe fijarse hacia el año 287 antes de Jesucristo. Poco se sabe de su ascendencia, pues mientras unos lo consideran de origen humilde, otros, al contrario, lo dicen emparentado con la estirpe reinante. Lo que hay de seguro es que fue, hasta la época de su muerte, amigo y consejero de los reyes de Siracusa. En un pasaje del Arenario, corregido por el sabio alemán Blass, el mismo Arquímedes mencionaría el nombre de su padre, el astrónomo Fidias (— των προτερων αστρολογων Ευδοξου... Φειδια δε του αμου πατρος = de los astrónomos anteriores. Endoxo Fidias, mi padre). De una frase de Diodoro, resulta que Arquímedes pasó algún tiempo en Alejandría, donde pudo estudiar con los sucesores de Euclides y trabó estrecha amistad con los matemáticos Conón de Samos y Eratóstenes de Cirene. Consta igualmente que viajó por España. Vuelto a Siracusa dedicó su vida entera a la investigación científica pura, lo que no le impidió, sin embargo, descubrir "como por entretenimiento", para emplear las palabras de Plutarco, aparatos tan útiles como el que todavía lleva el nombre de vis de Arquímedes, el polipastos, el tornillo sin fin y un planetolabio movido por fuerza hidráulica y de tan perfecto funcionamiento que permitía predecir los eclipses.

Algunos de los inventos mecánicos de Arquímedes fueron aplicados por él mismo durante el largo sitio que sus compatriotas tuvieron que sostener contra los romanos, en la segunda guerra púnica, y que terminó con la toma de la ciudad el año –212. Catapultas de alcance variable; máquinas para lanzar lluvias de proyectiles a través de agujeros practicados en las murallas; otras, consistentes en largas pértigas que se sobresalían fuera de los muros y descargaban sobre los buques romanos enormes masas, o los aferraban por la proa, y, operando a la manera de grúas, los suspendían en el aire para dejarlos caer de nuevo, destrozándolos; espejos cóncavos destinados a provocar el incendio de las naves enemigas por la concentración de los rayos solares: fueron recursos que la inventiva del gran siracusano, aguijoneada por el patiotismo, puso en juego durante casi tres años para resistir, él solo puede decirse, a un ejército numeroso y aguerrido, comandado por uno de los más hábiles generales de la época, ejemplo único en la historia militar.

Plutarco, en la vida de Marcelo, nos ha trasmitido algunos detalles de esta gloriosa defensa que sólo la traición pudo quebrantar al fin. El general romano, lamentándose de

la impotencia de sus ingenieros, "¿no conseguiremos nunca, exclamaba, vencer a este matemático Briareo que, sentado tranquilamente al borde del mar, juega a los bolos con nuestros navíos y, por la multitud de proyectiles que arroja sobre nosotros, deja chicos a los gigantes de cien brazos de la Mitología?" Pero todas sus recriminaciones no lograban contener el terror de sus soldados, que, al asomar por encima de las murallas un trozo de cuerda o madera gritaban: "helo ahí otra vez", y huían temerosos de que Arquímedes estuviera armando y poniendo en movimiento contra ellos alguna nueva máquina mortífera. Al fin, Marcelo desistió de tomar la ciudad por asalto y sólo esperó la victoria de la prolongación del asedio.

Arquímedes murió, como había vivido lo mejor de su existencia, absorto en la contemplación matemática. De las circunstancias de su muerte han quedado distintas versiones. Según Tito Livio, "durante el tumulto y las escenas odiosas de crueldad y codicia que abundaron en el saqueo de Siracusa, Arquímedes, ajeno al pavor que dominaba a los demás habitantes de la ciudad, se hallaba entregado al estudio de ciertas figuras que había trazado sobre el polvo (intentum formis quas in pulvere descripserat). En esa actitud recibió la muerte de manos de un soldado que no lo conocía (ab ignaro milite quis esset interfectum)." Plutarco da tres versiones del hecho: "Marcelo sintió más que nadie la muerte de Arquímedes; pues quiso la suerte que mientras se hallaba el sabio entregado al estudio de un problema geométrico con la mente y los ojos igualmente fijos en su investigación, no advirtió la entrada de los romanos y la captura de la ciudad. Y cuando un soldado se le acercó bruscamente y le ordenó que lo siguiera para conducirlo a la presencia de Marcelo, Arquímedes se negó a obedecerle hasta que hubiera acabado la solución y demostración de su problema, provocando con esa actitud la cólera del romano, que desenvainó entonces su espada y lo mató. Otros cuentan que el soldado corrió hacia él con la espada ya desnuda, amenazándole de muerte, y que, al verlo, Arquímedes le rogó que le concediera el tiempo necesario para no dejar incompleta la solución de su problema pero el otro, sin hacer ningún caso de su ruego, le quitó la vida. Otros, en fin, dicen que Arquímedes se dirigió al encuentro de Marcelo, llevando consigo instrumentos matemáticos y astronómicos, cuando unos soldados, en la creencia que iba cargado de dinero, le dieron muerte para robarlo".

Valerio Máximo, que escribía en los primeros años de nuestra era, reproduce, en el fondo, el relato de Tito Livio, poniendo además estas palabras (de su cosecha, probablemente) en boca de Arquímedes: *"noli, obsecro, istum disturbare"*: "No descompongas esto, yo te lo suplico" (Es decir, las figuras que había trazado en el suelo), palabras que un escritor griego del siglo XII, Zonaras, ha querido embellecer todavía parafraseándolas en el dialecto de Arquímedes: "Dirige tus golpes a mi cabeza pero no a mis figuras".

Arquímedes había pedido a sus amigos que colocaran sobre su tumba la representación de una esfera circunscripta por un cilindro, para recordar la que él prefería entre todas sus invenciones matemáticas. Pero fue su noble vencedor Marcelo quien hizo erigir el curioso monumento. Cicerón, cuestor en Sicilia, pudo verlo todavía, ciento treinta y siete años después.

Antes de abordar el examen de las obras de Arquímedes, séame permitida una breve disgresión.

Como otros grandes sabios de la escuela alejandrina, en la que perduraban las enseñanzas platónicas, y también, sin duda, por disposición innata, Arquímedes era un teorista intransigente. "Despreciaba, nos cuenta Plutarco, sus más ingeniosos inventos mecánicos, considerados por él como meros pasatiempos o juegos de la Geometría, ciencia a la cual rindió siempre exclusivo culto... No quiso dejar nada escrito sobre ellos, porque tenía por innoble y servil todo arte aplicado a nuestros usos, poniendo únicamente su ambición en aquellas cosas que llevan consigo lo bello y lo excelente".

A través del tiempo, Arquímedes ha acabado por simbolizar una de las dos grandes tendencias del espíritu humano, a tal punto que Schiller no ha encontrado nada más a propósito para personificar la desinteresada especulación del sabio, exenta de toda finalidad utilitaria, que evocar (como lo hace en hermosísimos versos) la gran figura histórica de nuestro siracusano: "Un joven sediento de saber se presenta ante Arquímedes. Iníciame, le dice, en la ciencia divina que ha brindado a la patria tan espléndidos frutos, protegiendo contra las armas enemigas los muros de nuestra ciudad. Bien haces en llamar divina a la ciencia, le responde el sabio; lo es en verdad; pero ya lo era, hijo mío, antes de ser provechosa al Estado. No la ames tan sólo por los frutos que engendra. Quien pretende a la Diosa no ha de buscar en ella a la mujer".

Este hombre, pues, que mostró tan rara habilidad para aplicar su saber a las artes mecánicas, poseía una organización mental del más decidido carácter idealista y abstracto: ejemplo incomprensible para los que piensan que los adeptos de la ciencia pura están fatalmente condenados a fracasar en las actividades prácticas de la vida.

Entre las obras de Kant, hay un corto pero sustancioso trabajo que lleva por título "Ueber den Gemeinspruch: das mag in der Theorie richtig sein tangt aber nicht für die Praxis", y en el cual arriba a esta conclusión, paradógica en apariencia, que, siempre que un teórico escolla en la aplicación práctica, es porque no ha penetrado bastante en la teoría, o en otras palabras, porque no es suficientemente teórico.

Arquímedes lo era en grado eminente, y sus éxitos en el campo de la Mecánica racional; sus inventos prácticos son, en efecto, sencillas consecuencias de sus teorías. Por lo demás, aquel su desprecio absoluto por "las artes innobles y serviles", de que nos habla Plutarco, no puede razonablemente ser otra cosa que el resultado de una reacción apasionada. No se goza de la influencia política de Arquímedes, amigo y consejero de los reyes y alma de una guerra tan larga como heroica, sin despertar el odio y la intriga de los mediocres, cuyos ataques mezquinos debían en este caso, tomar por blanco preferido la idiosincracia contemplativa del hombre de pensamiento, impropio para la acción.

Que Arquímedes haya dado a los *prácticos* de su época el rotundo mentís que sabemos, no ha bastado para atenuar siquiera el irreductible antagonismo; y hoy, como entonces sigue siendo un lugar común (Gemeinspruch) que la teoría no es más que un fútil entretenimiento, bueno para los espíritus mal conformados.

¡Los lugares comunes! Gustavo Flaubert, que experimentaba un deleite casi enfermizo en rastrear todas las manifestaciones de la tontería pretenciosa y dogmática, emprendió la tarea infinita de catalogarlas y ordenarlas bajo el título de *Dictionnaire de Idées reçues*, que podríamos traducir por Diccionario de los lugares comunes. En ese inventario de la estupidez humana, por muy incompleto que sea, no podía faltar el aforismo que consagra solemnemente la superioridad de la práctica sobre la teoría. Lo encontra-

mos en su lugar alfabético. *PRATIQUE: elle est superieure a la théorie..*

Otro fustigador de lugares comunes, no menos encarnizado que Flaubert, pero más propenso a moralizar, León Bloy, nos revela en su *Exégese des Lieux communs*, todo lo que suele encerrar de disimulada sordidez y bajeza la máxima corriente: *Il faut être pratique*, hay que ser práctico.

Culto del "hombre práctico", desdén por toda aspiración desinteresada y excelsa del espíritu: este doble criterio de la ruindad intelectual y moral, no ha escapado tampoco al fino psicólogo que es José Ingenieros. "Sin idealistas, dice en *El Hombre Mediocre*, sería inconcebible la evolución de la humanidad. El culto del "hombre práctico" ceñido a las contingencias del presente, importa un renunciamiento a toda perfección. El hábito organiza la rutina y nada crea hacia el porvenir; los imaginativos dan a la ciencia sus hipótesis, al arte su vuelo, a la moral sus ejemplos, a la historia sus páginas luminosas; los prácticos no han hecho más que aprovechar de su esfuerzo, vegetando en la sombra".

Resumiendo, para concluir con este paréntesis –al que servirá de excusa el tono familiar de mis conferencias,– siempre que oigan ustedes encarecer las virtudes omnipotentes de la práctica y deplorar la irremediable inutilidad de la teoría, estén seguros de hallarse en presencia de un mentecato, cuando de un impostor.

La historia de los documentos que han servido de base a las ediciones modernas del texto de Arquímedes, es relativamente sencilla.

A fines del siglo XV, cuando el celo de los eruditos del Renacimiento había desenterrado con ardor incansable los tesoros paleográficos de las viejas bibliotecas, no se conocía más que un solo manuscrito de Arquímedes. Ese manuscrito del siglo IX o X, probablemente desaparece hacia el año 1550, sin que se tengan noticias posteriores de él.

Entre las copias de ese manuscrito, que felizmente se conservan, la más perfecta y fidedigna se halla en la Biblioteca Laurenciana de Florencia. En el manuscrito florentino falta, sin embargo, además de otras obras que se han descubierto más tarde o que parecen definitivamente perdidas, el *Tratado sobre los Cuerpos Flotantes*, cuyo primer libro se imprimió en Venecia en 1543, traducido al latín por Nicolás Tartaglia, y el segundo, en la misma ciudad, también exclusivamente en la traducción latina de Tartaglia, en el año 1565 (ocho años después de la muerte del traductor).

Se sospecha, con todo, que Tartaglia se sirvió únicamente de un códice latino del siglo XIII que tuvo a su disposición. Gran parte del original griego ha sido descubierta recientemente, junto con otra obra perdida de Arquímedes, *El Método*, de la que hablaremos enseguida.

Las obras de Arquímedes conocidas por los contemporáneos de Tartaglia, dispuestas en el orden cronológico más probable de su producción, son las siguientes:

1) Sobre el equilibrio de los planos (I)
2) Cuadratura de la parábola
3) Sobre el equilibrio de los planos (II)
4) Sobre la Esfera y el cilindro (I y II)
5) Sobre las Espirales
6) Sobre Conoides y Esferoides

7) Sobre los Cuerpos Flotantes (en latín)
8) Medición del círculo
9) El Arenario

Posteriormente se han descubierto y publicado tres obras más:

1) Una colección de Lemas que ha llegado hasta nosotros en una traducción árabe, la cual traducida a su vez al latín, fue publicada en Londres (1659) con el título de *Liber Assumptorum*. Es una colección de elegantes proposiciones de Geometría Plana, redactada por un matemático posterior a Arquímedes, pero cuyo contenido pertenece a éste en gran parte por lo menos.

2) Un curiosísimo problema conocido desde la antigüedad con el nombre de problema bovino (*problema bovinum)*. Redactado en verso, como otros muchos problemas aritméticos que figuran entre los epigramas de la Antología Griega, fue descubierto por Lessing (el literato alemán) en la Biblioteca de Wolfenbüttel en 1773.

3) Un tratado sobre el *Método* cuya existencia se conocía por una referencia de Suidas, escritor griego del siglo X y que había excitado siempre la curiosidad de los sabios. Fue descubierto al fin por Heiberg en una Biblioteca de Constantinopla. Formaba parte de un Códice del siglo X, que contiene además una porción considerable del Tratado de los Cuerpos Flotantes, solo conocido hasta entonces por la traducción latina de Tartaglia. Descifrado por Heiberg e incorporado a la segunda edición (1913) de las obras de Arquímedes publicada por aquel sabio, el *Método* ha sido traducido a las principales lenguas europeas, y en especial al inglés por T. L. Heath.

4) El *Stomachion*, descripción de una especie de juego de paciencia, que los antiguos llamaban "loculus Arquimedius". El prefacio y algunas proposiciones del Stomachion se hallaron en el Códice recién citado, demostrándose así que este juego de ingenio tuvo realmente por autor a Arquímedes, contrariamente a la opinión mantenida antes por el mismo Heiberg.

Otras obras de Arquímedes mencionadas por él mismo o por otros, pero que no han llegado a nuestros días, son las siguientes:

1) *Investigaciones relativas a los poliedros*. Pappus, después de aludir a los cinco poliedros regulares, describe otros trece descubiertos por Arquímedes, los cuales son, como aquellos inscriptibles en la esfera y están limitados por polígonos regulares, pero estos polígonos regulares no son iguales entre sí.

2) Una obra de Aritmética titulada *Principios*. Sabemos por su mismo autor que en este libro se exponía un sistema de nomenclatura suficientemente extenso para incluir números que hoy expresaríamos con la unidad seguida de 80000 billones de cifras. En el Arenario, Arquímedes resume su sistema, para facilidad, dice, de los que no conozcan los "Principios".

3) Un tratado sobre las *Balanzas o Palancas*. De lo que dice Pappus respecto de este tratado, parece desprenderse que en él demostraba Arquímedes el principio fundamental de los brazos de palanca. En él demostraba también, sin duda, el teorema que se admite como ya conocido en el *Tratado sobre la Cuadratura de la Parábola* a saber: si un cuerpo suspendido de un punto se halla en equilibrio, el punto de suspensión y el centro de gravedad del cuerpo están sobre la misma vertical.

4) Un tratado sobre los *Centros de Gravedad*. Obra mencionada por Simplicio, escoliasta de Aristóteles, muerto en 549. Arquímedes se refiere verosimilmente a esta obra cuando, en su tratado sobre el *Equilibrio de los Planos*, da como cosa probada antes, que el centro de gravedad del conjunto de dos cuerpos se halla en la recta que une sus centros de gravedad particulares. En el Tratado sobre los Cuerpos flotantes, Arquímedes da por sentado que el centro de gravedad de un segmento de paraboloide de revolución se encuentra sobre el eje a los dos tercios de su longitud, contados desde el vértice. Si esta proposición no había sido objeto de un trabajo separado, es de suponer que su enunciado y demostración debían figurar en la obra de que nos ocupamos.

5) *Catóptrica*. De este tratado de Optica se conserva una cita de Teón de Alejandría.

6) Sobre *Construcción de Planetolabios*.

7) Algún escrito sobre el *calendario* y la duración del año.

Como se ve, lo que sobrevive de la obra de Arquímedes es indudablemente lo más importante y original. El matemático siracusano ha sido en esto más afortunado que su gran antecesor Euclides. Y es un hecho tan raro como feliz que algunos libros de Arquímedes, ignorados por los matemáticos de los primeros siglos de nuestra era, han reaparecido mucho más tarde. Eutocio de Ascalón, que escribió en la primera mitad del siglo VI sus comentarios sobre la Medición del Círculo, el equilibrio de los Planos y la Esfera, y el Cilindro, no tuvo nunca en su poder ni el libro sobre las Espirales, ni el consagrado a la Cuadratura de la Parábola.

Arquímedes escribía sus obras en griego, porque ésta era la principal de las lenguas habladas en Sicilia. Ya en su época debía empezar a divulgarse el latín, pero el griego, junto con algún idioma local, perduró por muchos siglos entre los sicilianos. *Siculi trilingues*, los llama Apuleyo, bien que Pseudo Ascanio observe que ni el latín ni el griego se hablaban bien en la isla *(in ea insula quae neutra lingua bene utetur)*.

El dialecto griego empleado por Arquímedes era el de los primeros colonizadores de Siracusa, es decir el dórico. Así lo declara su comentador Eutocio. Hablando de un fragmento de contenido geométrico hallado por él en un vetusto libro, lo atribuye a Arquímedes. Y precisamente de esta frase de Eutocio, o mejor dicho de las palabras con que empieza, deduce Heiberg que las formas dóricas ya habían empezado a desaparecer de las copias en uso cuando escribía Estocio. En los manuscritos relativamente modernos que han servido de base a las ediciones impresas, no sólo quedan generalmente pocas trazas de las formas dialectales, sino que el texto primitivo ha sido con frecuencia objeto de alteraciones más profundas, ya porque al transcribirlo se juzgara necesario agregar algo para mayor claridad, ya porque se pensara que podían omitirse ciertas cosas por superfluas, ya, en fin, para introducir las palabras de la nomenclatura matemática más conformes al uso de la época.

Pasemos ahora en revista, no todas las obras o monografías existentes de Arquímedes, porque nos faltaría el tiempo necesario para semejante tarea, pero si aquellas que parecen más interesantes por su originalidad o por la fecundidad de las ideas que encierran y que han servido de fundamento (para emplear las palabras de Wallis) a casi todos los descubrimientos matemáticos de que se gloria nuestra edad.

Empezaré por lo que Heath llama las anticipaciones de Arquímedes al Cálculo Integral.

Se ha observado que, aún cuando el método de exhaustión o agotamiento, ya empleado por Euclides, ponía a los geómetras griegos frente a las ideas de lo infinitamente grande y de lo infinitamente pequeño, nunca se permitieron ellos usar de tales conceptos. Es cierto que el sofista Antifón, contemporáneo de Sócrates, con quien frecuentemente disputaba, había afirmado que si se inscribía en un círculo un polígono regular cualquiera, digamos un cuadrado, y luego un octógono,construyendo triángulos isósceles en los cuatro segmentos y así siguiendo hasta agotar el área del círculo, se acabaría por inscribir un polígono cuyos lados, a causa de su pequeñez, coincidirían con la circunsferencia del círculo. Pero, como lo hacía notar Eudemo, un polígono inscripto en una circunsferencia no coincide nunca con ella, sea cual fuere la pequeñez de sus lados, porque admitirlo significaría el abandono del principio según el cual las magnitudes geométricas son divisibles *ad infinitum*. Probablemente las mismas disputas interminables que originaba entre los sofistas la noción del infinito, explicaban la repugnancia de los geómetras griegos por las expresiones *infinitamente grande e infinitamente pequeño*, que siempre reemplazaban por las ideas de *mayor o menor que cualquier magnitud asignable*. Y en esto se adelantaban a los modernos, que sólo admitimos aquellas expresiones para comodidad del lenguaje, pero excluyendo sistemáticamente el concepto metafísico del infinito, salvo en algunas proposiciones de la teoría de los conjuntos, rama de las matemáticas recientes cuya exposición didáctica está lejos aún de su forma definitiva. La misma idea de límite les parecía imprecisa. Así, por ejemplo, no se encontrará en ningún geómetra griego la afirmación de que una circunferencia es el límite de un polígono regular de infinito número de lados infinitamente pequeños. Ante el abismo del infinito, dice Hankel, se detenían, sin aventurarse a trasponer la frontera de las concepciones claras.

Veamos primero como aplicaba Arquímedes el método de exhaustión, y mostraremos después, cómo extendió ese método hasta efectuar indirectamente la integración de algunas funciones sencillas.

Para probar que el área de un segmento parabólico es igual a los cuatro tercios de la de un triángulo que tenga la misma base y vértice que el segmento, Arquímedes imagina en cada uno de los segmentos menores determinados por el triángulo de comparación otro triángulo inscripto, cuya base es el lado correspondiente del triángulo primitivo, y cuyo vértice es el del arco de parábola respectivo. Sigue aplicando análoga construcción a los segmentos sucesivos y observa que si A es el área del triángulo primitivo, las areas de los triángulos adicionales son los términos de una sucesión

$$\frac{1}{4}A, \left(\frac{1}{4}A\right)^2 A, \left(\frac{1}{4}A\right)^3 A \ldots .$$

El área del segmento es, en realidad, la suma de la serie infinita

$$A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}A\right)^2 A + \ldots .$$

pero Arquímedes no llega por ese camino al cálculo del área.

Prueba, ante todo, que si A_1 A_2 ... A_n son los *n* primeros términos de la serie, de modo que

$$A_1 = 4A_2. \ A_2 = 4A_3...$$

se tiene

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n + \frac{1}{3} A_n = \frac{4}{3} A$$

o bien

$$A \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] = \frac{4}{3} A$$

Obtenido este resultado, nosotros comprobaríamos inmediatamente que $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ se hace indefinidamente pequeño al crecer *n*. que, por consiguiente, el límite de la suma del primer miembro es igual a $\frac{4}{3}$ A y que es éste por lo tanto el valor del área del segmento parabólico. Arquímedes llegaba sin duda a este resultado por intuición, pero su método expositivo es otro. Enuncia simplemente la proposición: el área del segmento es igual a $\frac{4}{3}$ A, y luego verifica en la forma tradicional, mediante la demostración por reducción al absurdo, que no puede ser mayor ni menor que $\frac{4}{3}$ A.

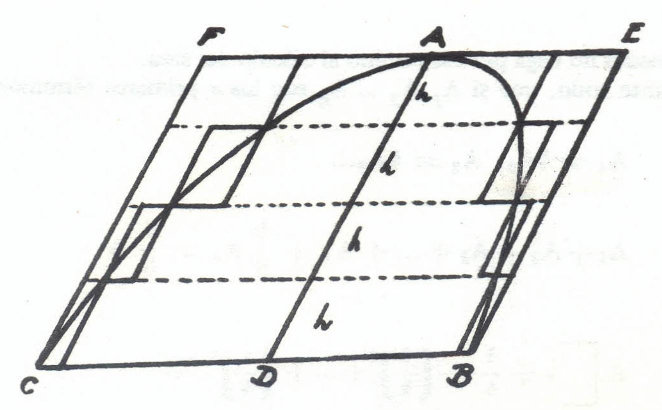
En su tratado sobre Conoides y Esferoides (las superficies que hoy se llaman cónicas de revolución), Arquímedes se propone hallar el volumen de un segmento de paraboloide de revolución. Recuerda, para empezar, un lema ya demostrado en su libro de las Espirales, a saber: que, llamando *h* a la razón de una progresión aritmética

$$h + 2h + 3h + ...$$

la suma de sus *n* primeros términos es mayor que $\frac{1}{2} n^2 h$ y la suma de sus $n-1$ primeros términos es menor que la misma cantidad.

Texto omitido en la publicación original.

[La evolución de la ciencia matemática griega ofrece así un curioso contraste con el desarrollo literario y filosófico, el cual decae rápidamente en la Metrópoli, sin lograr fuera de ella ningún reflorecimiento (excepto quizá para la poesía), en tanto que en Alejandría y en Siracusa surgen después del hundimiento político de la Grecia los más extraordinarios genios matemáticos de la antigüedad: Euclides, Arquímedes y Apolonio de Perga.]



Supone después inscripta en el segmento de paraboloide una figura constituída por pequeños cilindros (como se indica en la figura), rectos u oblicuos, cuyos ejes se encuentran a lo largo del eje del segmento o de la paralela a él que pasa por A y dividen a esta recta en cualquier número de partes iguales. Otra figura análoga circunscripta al paraboloide consta, como la anterior, de pequeños cilindros en igual número.

(En la figura, GB es la traza de la base del segmento sobre el plano del papel que se supone, perpendicular a dicha base, y FE es la traza del plano tangente paralelo a la base).

Llamando n a este número y h a la longitud común de cada eje de los pequeños cilindros, Arquímedes, basándose en propiedades conocidas de la parábola, demuestra que

$$\frac{\text{vol. cilindro CE}}{\text{vol. sólido inscrip.}} =$$

$$\frac{n^2 h}{+ 2h + \ldots + (n\text{-}s)\,h} > 2, \text{ por el lema}$$

y

$$\frac{\text{vol. cilindro CE}}{\text{vol. sólido circuns.}} =$$

$$\frac{n^2 h}{h + 2h + \ldots + nh} < 2, \text{ por el lema.}$$

Como, por otra parte, ha demostrado antes que aumentando suficientemente el número n, puede lograrse que los volúmenes de los sólidos inscripto y circunscripto al paraboloide difieran en menos que cualquier cantidad asignable, le es fácil llegar a la conclusión, comprobada como siempre por una simple reducción al absurdo, que

cilin. CE = 2 segmento parabólico

Y esta conclusión equivale exactamente a afirmar que, si *h* disminuye indefinidamente, aumentando a la vez *n*, de modo que *nh* se conserve invariablemente igual a la lon-

gitud de AD, que llamaremos *e*:

$$\lim_{h \to 0} \frac{n^2 h}{h + 2h + \ldots nh} = \frac{\frac{e^2}{h}}{h + 2h + \ldots nh} = 2$$

es decir

$$\lim_{h = 0} h \left[h + 2h + \ldots + nh \right] = \frac{1}{2} e^2$$

lo que, en notación moderna expresaríamos por la fórmula

$$\int_0^e x\,d\,x = \frac{1}{2} e^2$$

En el mismo libro (sobre Conoides y Esferoides) halla Arquímedes el volumen de un segmento de hiperboloide de revolución. Parte de la demostración del lema siguiente: si se designa por *sn* la suma de la serie de *n términos*

$$(ah + h^2) + |a.\ 2h + (2h)^2| + \ldots + |a.\ nh + (nh)^2|,$$

se tiene

$$\frac{n\,|a.\ nh + (nh)^2|}{sn} < \frac{(a + n\,h)}{\left(\frac{a}{2} + \frac{n\,h}{3}\right)}$$

y

$$\frac{n\,|a.\ nh + (nh)^2|}{s_{n-1}} > \frac{(a + nh)}{\left(\frac{a}{2} + \frac{n\,h}{3}\right)}$$

Pasa después a considerar las figuras inscripta y circunscripta, formadas, como en el caso anterior, por pequeños cilindros, cuyos ejes supone colocados sobre el eje, si AD representa el eje, o sobre el diámetro si AD representa el diámetro correspondiente al punto A de la hiperbola sección del hiperboloide por un plano que contiene al eje y al punto A.

Demuestra entonces que, si hay *n* subdivisiones de AD iguales a *n*,

$$\frac{\text{vol. cilindro CE}}{\text{vol. sól. inscrip.}} = \frac{n\,[a.\,nh + (nh)^2]}{s_{n-1}} > \frac{(a + nh)}{\left(\frac{a}{2} = \frac{nh}{3}\right)}$$

$$\frac{\text{vol. cilindro CE}}{\text{vol. sól. circuns.}} = \frac{n\,[a.\,nh + (nh)^2]}{sn} < \frac{(a + nh)}{\left(\frac{a}{2} + \frac{nh}{3}\right)},$$

designando por a el eje o el diámetro de la hipérbola de la figura; y llega, por un razonamiento análogo al que empleó en el caso del paraboloide, a la conclusión:

$$\frac{\text{vol. cilindro CE}}{\text{vol. seg. hiperboloide}} = \frac{(a + nh)}{\left(\frac{a}{2} + \frac{nh}{3}\right)}$$

lo que equivale a afirmar que el límite común de los dos miembros intermedios de las dos igualdades-desigualdades que preceden, es igual al tercer miembro de las mismas. Esto último puede expresarse, escribiendo *b* en vez de AD, por la siguiente igualdad:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n\,(ab + b^2)}{s_n} = \frac{(a + b)}{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)},$$

ó

$$\lim_{n=\infty} \frac{nb}{s_n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)},$$

ó

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = b\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$$

o, en fin,

$$\lim_{h=O} hs_n = b^2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)$$

Pero

$$hs_n = ah\,(h + 2h + \ldots + nh) + h$$

$$[\,h^2 + (2h)^2 + \ldots + (nh)^2\,]$$

Arquímedes obtiene pues el resultado que, en notación moderna, se expresará por la fórmula:

$$\int_0^b (ax + x^2)\, dx = b^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \right)$$

En el libro sobre las Espirales, Arquímedes consigue calcular el área de la superficie limitada por un arco de la curva (espiral de Arquímedes) y los radios vectores extremos cuyas longitudes designaremos por *b y c* ($c > b$). El procedimiento empleado, se traduce, como en los casos anteriores por una integración

$$\text{Area} = \int_b^c x^2\, dx = \frac{1}{3} (c^3 - b^3)$$

Pongamos un último ejemplo, abreviando la exposición. En el primer libro sobre la Esfera y el Cilindro para evaluar el área de un casquete esférico por el procedimiento de exhaustión, Arquímedes supone inscripto y circunscripto en el arco generador del casquete dos polígonos de un mismo número par de lados iguales entre sí. Imaginando, que toda la figura gira alrededor de un eje de simetría, las superficies cónicas y tronco-cónicas generadas, estarían representadas por sumas de series que, en notación trigonométrica escribiríamos hoy de modo siguiente (llamando *alfa* al semi-arco, *a* a su radio y *2n* al número de lado de cada polígono):

$$\pi a^2 . 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2n} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{n} \right.$$

$$\left. + \ldots + \operatorname{sen} (n\text{-}1) \frac{\alpha}{n} + \operatorname{sen} \alpha \right] =$$

$$= \pi a^2 . 2 \cos \frac{\alpha}{2n} (1 - \cos \alpha)$$

para la figura inscripta; y la misma expresión dividida por

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2n}$$

para la figura circunscripta.

Si *n* crece indefinidamente,

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2n}$$

tiende indefinidamente a la unidad, y los valores de las dos expresiones se aproximan también indefinidamente a un valor común.

La fórmula que demuestra Arquímedes:

$$\textbf{Area del casquete} = 2\pi a^2 (1 - \cos\alpha)$$

implica la integración

$$\pi \int_0^{\alpha} 2 \operatorname{sen} \Theta \, d\Theta = 2\pi a^2 (1 - \cos\alpha)$$

Algunos de los problemas resueltos por Arquímedes requerían la aplicación de principios y problemas aritméticos que hoy nos son familiares, pero que en su época no se conocían. De ahí la necesidad para él de subsanar las deficiencias del sistema de numeración usual entre los Griegos y que distaba mucho de ser perfecto y de inventar algunas reglas de cálculo para sus investigaciones. Así, por ejemplo, para tratar ciertas cuestiones geométricas, no podía eludir las ecuaciones de tercer grado. Para calcular un valor aproximado de la relación entre la circunferencia y el diámetro tuvo que efectuar la extracción de raíces cuadradas de números enteros y fraccionarios e inventar, porque probablemente no existían, procedimientos adecuados. Para imaginar lo trabajoso que era el cálculo llevado a cabo por Arquímedes, bastará recordar que los dos valores, por defecto y por exceso, que obtiene $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{10}{70}$, lo obligaban a rectificar polígonos regulares de noventa y seis lados.

De las monografías cuyo tema no es puramente geométrico, citaremos las que tratan de los *Cuerpos Flotantes* y del *Equilibrio de los Planos*.

La primera contiene diez y nueve proposiciones y constituye el primer ensayo conocido de Hidrostática teórica. En ella figura el principio que todavía conserva su nombre. La determinación de la posición de equilibrio de un cuerpo flotante limitado por un segmento de esfera o de paraboloide, se obtiene por razonamientos geométricos de una gran subtilidad. Arquímedes consigue demostrar, entre otras curiosas proposiciones, la siguiente: Suponiendo que un sólido de forma segmento-parabólica de altura h y de parámetro $2p$ flota con su vértice inmergido y su base fuera del líquido, para que el equilibrio sea posible en una posición oblicua del eje, la densidad del sólido ha de ser menor que

$$\frac{(h - 3p)^2}{h^2}$$

En la segunda monografía, sobre el *Equilibrio de los Planos*, Arquímedes enuncia y demuestra los primeros principios de la Mecánica Racional.

El objeto principal que se propone es hallar los centros de gravedad de algunas figuras geométricas; y no sólo expone y demuestra las reglas que sirven para determinarlo en figuras simples de perímetro rectilíneo, sino que aborda y resuelve el problema en el caso mucho más complicado del segmento parabólico de una o dos bases.

Otra excursión interesante de Arquímedes fuera de la Geometría –dominio favorito de sus investigaciones– es el problema aritmético, célebre en la antigüedad con el nombre de *problema bovino*.

Era un pasatiempo común entre los griegos –y la antología ofrece de ello numerosos ejemplos– proponer, bajo la forma de pequeñas proposiciones en verso, enigmas,

acertijos o problemas aritméticos. La solución de estos juegos de ingenio es generalmente sencilla; pero no así por cierto la del problema de Arquímedes, tan extraordinariamente complicado que no ha faltado quien se pregunte si el mismo autor era capaz de resolverlo. El solo enunciado, contenido en cuarenta y cuatro versos, ha dado mucho que discutir a los matemáticos y a los filólogos, que generalmente dudan que haya sido todo él escrito por Arquímedes. Moritz Cantor, gran autoridad en la materia, declara sin embargo, que la sospecha, a su juicio infundada, de que Arquímedes no hubiera podido resolver su problema, no sería, en todo caso razón suficiente para negar la autenticidad del enunciado.

Traducido al lenguaje algebraico, el problema consiste en hallar cuatro números enteros por medio de tres ecuaciones lineales simultáneas, con el agregado –que quizás no se debe a Arquímedes– de otras condiciones suplementarias que obligan a resolver una ecuación indeterminada del tipo de las de Pell:

$$t^2 - 4.729{,}494\, u^2 = 1$$

Un sabio alemán Amthor, que estudió el problema completo en 1880, llega, después de laboriosísimos cálculos, a la determinación aproximada de los cuatro números pedidos, números tan enormes que en total solo puede expresarse por la fórmula abreviada

$$7766 < 206541 >$$

o sea, 7766 seguido de un número de cifras igual a 206541. Basta decir que, para escribir ese total en tipo de imprenta, se necesitaría un volumen de $82\frac{1}{2}$ páginas de cincuenta renglones, a razón de cincuenta cifras por renglón!

No ignoraba Arquímedes, a buen seguro, al proponer a sus contemporáneos semejante problema, la imposibilidad en que estaban de resolverlo: travesura inocente que ilumina con una sonrisa de buen humor la fisonomía severa del patriota y del sabio.

Terminaré aquí este resumen necesariamente incompleto. Con él no he pretendido otra cosa que despertar en ustedes el deseo de conocer más íntimamente las producciones de Arquímedes. La sabia traducción, modernizada y comentada de Tomás L. Heath, que yo he consultado con provecho para preparar esta conferencia, facilita, inclusive a los que poseen las lenguas clásicas, el estudio directo del texto arquimediano.[1]

Hubiera deseado también mostrarles con mayor eficacia, que el hombre de quien solo he podido trazar una semblanza demasiado imperfecta es, por lo menos tan interesante como su obra.

(1) La primera traducción literal en francés acaba de ser publicada por el sabio belga Ver Eecke.

3.4 _ APOLONIO DE PERGA

El geómetra Apolonio, de quien vamos a ocuparnos hoy, es el último en el orden cronológico de los grandes matemáticos de la primera y más brillante época de la escuela alejandrina.

En nuestras conferencias anteriores vimos cómo tuvo su origen la Geometría en Egipto y progresó rápidamente en la Magna Grecia y en Atenas. Pero la época de más esplendor para las Matemáticas de la antigüedad, empieza después del desmembramiento del Imperio de Alejandro. Sus lugartenientes fundaron nuevas capitales o agrandaron y embellecieron las existentes, fijaron en ellas sus cortes, e introdujeron por todas partes la civilización helénica. Una de esas ciudades fue Alejandría, que nació, puede decirse, de un sueño de Alejandro, si hemos de prestar fé a las palabras del historiador Heráclito que Plutarco cita en su biografía del héroe macedonio. Después de conquistado Egipto, quiso Alejandro, siguiendo su plan de disolver las viejas nacionalidades, elevar allí una ciudad, para poblarla de griegos que propagaran el helenismo en el país recién conquistado. Una noche, mientras dormía, creyó oir dos versos de Homero, su poeta predilecto: los versos 354 y 355 del Cuarto Canto de la Odisea, que el traductor de la Biblioteca Clásica vierte así al castellano,

En el undoso mar hay una isla
En frente del Egipto, a la cual llaman
Faros.

Apenas despierto, "marchó al Puerto de Faros, que entonces era isla y ahora está unido por una calzada al continente. Cuando vió aquel lugar tan ventajosamente situado (porque es una faja que, a manera de istmo, tiene la forma de una lengua de tierra que sirve de separación entre un vasto pantano y el mar, y remata en un anchuroso puerto) no pudo menos de exclamar que Homero, admirable en otras cosas, era también un habilísimo arquitecto, y mandó que le diseñaran la forma de la ciudad, acomodada al sitio" Y así, surgió en el año -332 esa ciudad magnífica, destinada a ser en breve plazo la sucesora de Atenas y la heredera del espíritu científico y literario de Grecia. Cincuenta años después de su fundación la joven capital contaba ya con más de trescientos mil habitantes y era la ciudad más importante y rica del mundo. Su veloz crecimiento, comparable al de algunas ciudades americanas, se debió en gran parte al comercio. Su posición la ponía en contacto inmediato con Africa, Europa y Asia; era como una encrucijada del mundo antiguo. Su belleza, la regularidad perfecta de sus calles, el cosmopolitismo de su población, la grandiosidad de sus palacios y de su puerto, la extrema dulzura del clima y la política inteligente de los primeros reyes de Egipto, que en ella residían, la convirtieron en un centro de universales atractivos, en el París de aquellos siglos de encantadora decadencia que precedieron a la eclosión del cristianismo y a las grandes invasiones bárbaras. Ese atractivo casi sensual que irradia de la ciudad de los Tolomeos y de Cleopatra se traduce involuntariamente, por decirlo así, en los epítetos cariñosos con que suelen acompañar su nombre los escritores de entonces, y vive todavía en más de una producción literaria de nuestro tiempo.

Pero, por encima de todo, Alejandría fue la ciudad universitaria y la ciudad de los

libros. El trabajo de investigación original o de erudición tenía allí su templo: el famoso Museo, con su biblioteca de medio millón de volúmenes, sus observatorios astronómicos, sus salas de disección anatómica, sus jardines botánicos y zoológicos. Los pórticos que rodeaban el Museo conducían hasta un elegante edificio que contenía dos salas principales: la Exedra, donde se reunían los sabios adscriptos al Museo, y el Refectorio, donde tomaban sus comidas en común. Un personal numeroso vivía, en efecto, a la sombra del Museo, "que tenía algo de convento, algo de universidad y algo de academia". En el Museo y sus establecimientos anexos, se estudiaban todas las ciencias y todas las artes conocidas entonces: la Historia, la Filología, las Matemáticas, la Física, las Ciencias Naturales y Médicas, la Tecnología Musical, la Erudición, en todas sus ramas (los poetas mismos eran casi siempre y a la vez eruditos). La lengua en que estos sabios y artistas escribían era un dialecto griego un poco artificial que acabó por reemplazar los viejos dialectos literarios, incluso el ático, del cual derivaba por simplificación, e imponerse como lengua común (κοινη διαλετος) a todos los hombres cultos del mundo helénico o helenizado.

Fue en esta ciudad maravillosa donde pasó casi toda su larga vida el geómetra Apolonio de Perga. Los pocos datos biográficos que sobre él nos ha dejado la antigüedad, se reducen a lo siguiente: Nació en Perga, ciudad de la Panfilia, en el Asia Menor; vivió en tiempos del primer Tolomeo Evergetes, que empezó a reinar en -247. Estudió Matemáticas en Alejandría bajo la dirección de los discípulos de Euclides, que profesaban esa ciencia en el Museo. La fecha de su muerte puede fijarse hacia el año -170. Se sabe que visitó la ciudad de Pérgamo, otro de los focos más brillantes de la cultura helénica, y que allí conoció al geómetra Eudemo a quien dirije algunas de sus cartas-prefacios. Hizo también un viaje a Efeso, donde trabó relación con otros grandes matemáticos. Las informaciones referentes a su carácter son escasas e inseguras. El erudito compilador de la Colección Matemática, Pappus de Alejandría, nos lo representa, en un pasaje tal vez espúreo de su obra, como un hombre jactancioso, envidioso, y demasiado dispuesto a denigrar a sus émulos. Si la censura fuera fundada, ella solo sería una prueba más, como lo observa Hoefer, de que la ciencia, que tanto contribuye a elevar la inteligencia y el bienestar material de los hombres, no siempre asegura su mejoramiento moral. Màs grave todavía es la acusación que según Eutocio (Comentarios a las Secciones Cónicas de Apolonio, publicados en la edición de Heiberg. Tomo II, páginas 168-169) le dirigió Heráclides, biógrafo de Arquímedes, de haber cometido un robo literario en perjuicio de este último, apoderándose de algunos de sus escritos inéditos. Pero esta acusación parece injusta, como lo expresa el mismo Eutocio, y tan falsa como la afirmación de Pappus, según la cual los cuatro primeros libros de las Cónicas de Apolonio pertenecerían a Euclides. Es claro que Apolonio, al igual de cualquier otro autor científico, se habrá valido de todos los trabajos anteriores referentes al asunto que se proponía tratar. El no dice en ninguna parte de sus escritos que la teoría de las cónicas le pertenezca integramente. Pero, desde las primeras proposiciones de su obra, Apolonio destaca dos hechos importantes cuyo descubrimiento no puede disputársele: *Primero*, que las tres cónicas pueden obtenerse como secciones de un cono cualquiera, eligiendo convenientemente los planos secantes; en tanto que los geómetras anteriores, que solo consideraban planos secantes perpendi-

culares a una generatriz del cono, tenían que recurrir a un cono acutángulo para obtener la elipse, a uno rectángulo para la parábola, y a uno obtusángulo para la hipérbola. Y *segundo*, que la distinción de las tres cónicas (Libro I, Proposiciones 11, 12 y 13) se basa en propiedades métricas, que, precisamente, lo condujeron a introducir las denominaciones de parábola, elipse e hipérbola, en vez de las que usaban sus predecesores, propiedades métricas que hoy día ponemos de manifiesto por medio de las ecuaciones referidas a un vértice:

$$y^2 = px, \quad y^2 = p\,x - \frac{p}{a}\,x^2, \quad y^2 = p\,x + \frac{p}{a}\,x^2.$$

Todo lo que podemos deducir de las apreciaciones de Pappus es que las cuestiones de prioridad, que suelen originar tan frecuentes y enconadas discusiones entre los sabios, existían ya en la época de Apolonio. En todo caso la fama de Apolonio era ya grande entre sus contemporáneos, que lo llamaban corrientemente el gran geómetra o el geómetra por excelencia; y esa fama no ha disminuído después, a pesar de los estragos del tiempo, que ha conservado las obras didácticas, más útiles en las escuelas y más accesibles al vulgo, pero de originalidad y profundidad menos marcadas, y ha robado en cambio a la posteridad, –salvo algunos raros fragmentos y alusiones no siempre comprensibles,– las producciones más valiosas y personales. Leibniz, unía los nombres de Apolonio y de Arquímedes en aquella su frase tantas veces citada: *qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum sunmmorum virorum inventa parcius mirabitur*. Chasles opina que el Tratado de las Cónicas de Apolonio, contiene ya las propiedades más interesantes de esas curvas. Y Montucla, comparando la obra del marqués de l'Hôpital sobre las Secciones Cónicas con el Tratado de Apolonio, declara: "No temo decir que en el geómetra antiguo hay una teoría mucho más extensa y más completa de esas curvas que en el geómetra moderno".

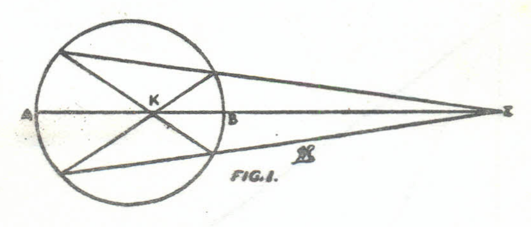
Antes de ocuparnos de las Cónicas, mencionaremos otros trabajos de Apolonio, que por desgracia solo podemos conocer fragmentariamente y por referencias.

El astrónomo Apolonio Epsilon, designado así por haber consagrado mucho tiempo al estudio de nuestro satélite, cuya forma antes del cuarto creciente se asemeja bastante a la de la letra epsilon del alfabeto griego, ha sido identificado por Paul Tannery y otros historiadores de las Matemáticas con Apolonio de Perga. Esa identificación es discutible, pero hay otros motivos para suponer que nuestro geómetra haya cultivado también la Astronomía. Un pasaje del Almagesto de Tolomeo (Primer Capítulo del Libro XII) parece aludir a un escrito de Apolonio de Perga sobre el movimiento retrógrado de los planetas y su explicación por el empleo de epiciclos.

Y, ya que mencionamos el Almagesto, he aquí dos teoremas que Tolomeo atribuye a Apolonio de Perga y que figuran en el Capítulo quinto del libro VIII de esa obra:

1o. Si del punto z, exterior a una circunsferencia, se traza una recta ZA que pase por el centro, y dos secantes simétricas con respecto a ZA; uniendo los extremos no correspondientes de las cuerdas determinadas por las secantes, su punto de intersección K se hallará situado sobre el diámetro AB, y se tendrá la proporción

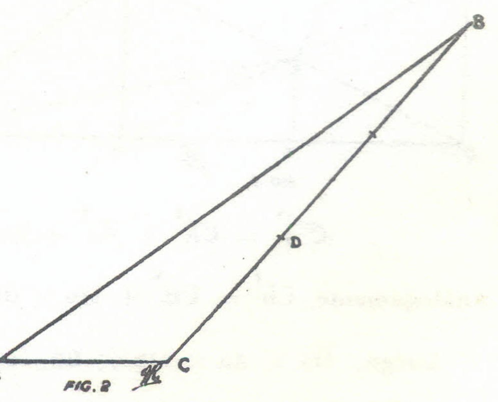
$$\frac{AK}{KB} = \frac{AZ}{BZ}.$$



(En Geometría moderna: Dos cuerdas trazadas por un punto de una circunferencia, dividen armónicamente el diámetro perpendicular a la recta que une sus extremos no comunes).

2.° Si en el triángulo A B C, a > b, se tendrá, tomando C D ≥ b,

$$\frac{CD}{BD} > \frac{\text{ang. } B}{\text{ang. } C}$$



Supongamos (caso más desfavorable para la demostración) que C D = b. Consideremos b y C invariables y B moviéndose a lo largo de C D. Para B suficientemente próximo a D, es evidente que la relación de la tésis se verifica. Para que dejara alguna vez de verificarse dicha relación, sería necesario, en vista de la continuidad, que existiera una cierta posición de B para la cual tuviéramos

$$\frac{CD}{CB - CD} = \frac{\text{ang. } B}{\text{ang. } C}, \text{ o bien, } \frac{AC}{CB} = \frac{\text{ang. } B}{180^{\circ}\text{-ang. } A}. \text{ Pero } \frac{AC}{CB} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } A};$$

luego pues, sería $\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A} = \frac{\text{ang. } B}{180^{\circ}\text{-ang. } A}$, lo que sólo resultaría posible si los ángulos B y 180°—A fueran iguales, hipótesis contraria a la Geometría del triángulo.

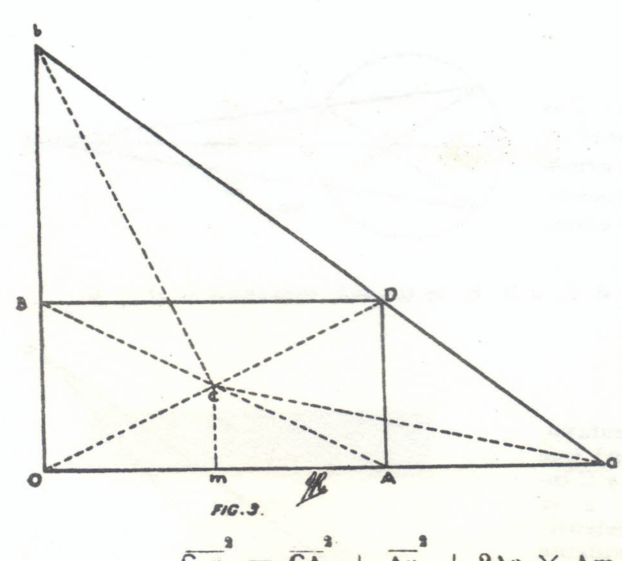


FIG. 3.

Se conoce de Apolonio una solución del problema de las dos medias proporcionales entre dos rectas dadas, problema famoso en la antigüedad. Su solución implicaba un dispositivo mecánico, desde que ella no es posible en la Geometría de la regla y el compás.

Sean (Fig. 3) OA y OB las dos rectas dadas. Trácese la recta ab que pase por el vértice D del rectángulo OADB y tal que sus extremos a y b equidisten del centro C del rectángulo. Se tendrá, en el triángulo A a C,

$$\overline{Ca}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{Aa}^2 + 2Aa \times Am = \overline{CA}^2 + Oa \times Aa.$$

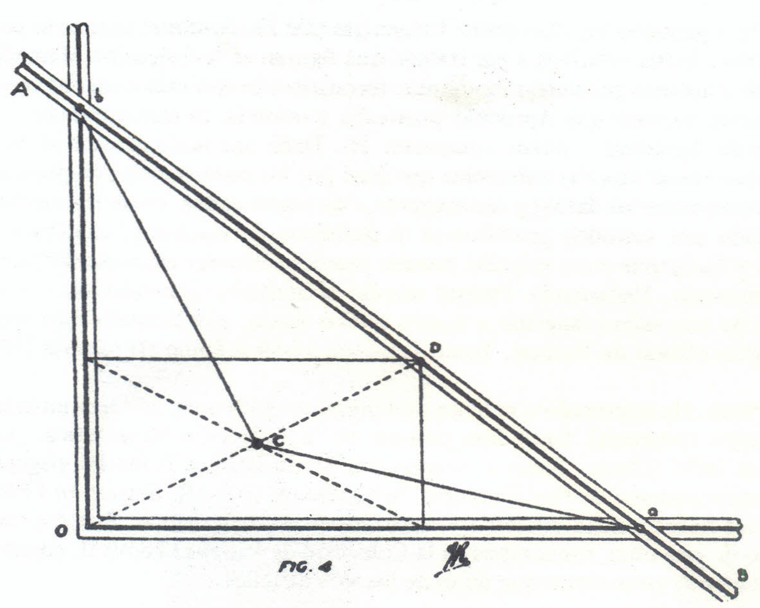
Análogamente, $\overline{Cb}^2 = \overline{CB}^2 + Ob \times Bb.$

Luégo, $Oa \times Aa = Ob \times Bb$, o bien, $\frac{Oa}{Ob} = \frac{Bb}{Aa}$.

Pero la semejanza de los triángulos BbD, Oba y ADa da:

$$\frac{BD}{Bb} = \frac{Bb}{Aa} = \frac{Aa}{OB}.$$

Por consiguiente: $\frac{OA}{Bb} = \frac{Bb}{Aa} = \frac{Aa}{OB}$.



El mecanismo ideado por Apolonio para realizar esta solución podría ser el que índica la figura 4, en la que Oa y Ob son dos reglas fijas en posición rectangular y provistas de una ranura longitudinal; AB una regla semejante a las otras dos, pero móvil; ab dos clavijas que pueden deslizárse a lo largo de las ranuras longitudinales, D un espigón guia de la regla AB, y finalmente C una pequeña polea fija, tangente al centro del rectángulo y destinada a retener la correa elástica aCb cuyo punto medio llevaría una marca que, en la posición buscada, coincidiría con C.

De las obras menores de Apolonio (menores en extensión, pero tal vez no en importancia) solo se conocen fragmentos en el original griego (Volúmen II de la edición de las Cónicas de Heiberg), o en traducciones árabes. De algunos opúsculos, únicamente han sobrevivido los títulos.

1o. La obra que en las traducciones latinas de llama *De Sectione Rationis*. Constaba de dos libros y tenía por objeto resolver el problema siguiente: Dadas dos rectas en un plano, un punto en cada una de ellas y un tercer punto sobre el plano, pero fuera de las rectas, trazar por este punto una recta que determine sobre las dadas, a partir respectivamente de los puntos dados en ellas, segmentos cuyas longitudes estén en una razón fijada de antemano. La traducción árabe de este opúsculo fue descubierta por Eduardo Bernard en la Biblioteca Bodleiana (Oxford) y traducida al latín por el mismo y por Edmundo Halley, el editor de las *Secciones Cónicas*.

La solución del problema propuesto es demasiado larga para darla ahora. Pueden verla en la Historia de las Ciencias Exactas en la Antigua Grecia, de Gino Loria (Pág. 388 y siguientes).

2o. Otros dos opúsculos de Apolonio tenían por objeto la resolución de problemas análogos al precedente. De esos opúsculos solo nos quedan los títulos (en latín: *De*

Sectione Spatti y *De Sectione Determinata*) y algunas referencias en la Colección de Pappus.

3o. La Memoria o pequeño Tratado sobre Tangencias (*De Tactionibus*) analizado por Pappus. Los veintitrés lemas relativos a ese trabajo que figuran en la Colección Matemática, han permitido a algunos geómetras modernos, reconstituirlo con más o menos verosimilitud. El problema famoso que Apolonio planteaba y resolvía, en este opúsculo –el llamado problema de Apolonio,– puede enunciarse así: Dada una terna de puntos, rectas y circunferencias, trazar una circunferencia que pase por los puntos dados (suponiendo que figuren puntos entre los datos) y sea tangente a las líneas dadas. Entre los modernos que han tratado por métodos geométricos el problema de Apolonio, citaremos a Viéte, Euler, Fuss y Gergonne cuya solución pueden ustedes consultar en cualquier Geometría (De Comberousse, Hadamard). Fermat estudió el problema generalizado, –mucho más difícil–, de una esfera tangente a cuatro esferas dadas, que le había sido propuesto por Descartes (Obras de Fermat, Tomo I, página 52-59 y Tomo III páginas 149-166).

4o. *De Locis Planis*. Ha interesado a muchos matemáticos modernos, que han intentado su reconstitución conjetural, basándose siempre en la Colección Matemática: por ejemplo Fermat en 1637 (Obras: Tomo I, páginas 3 a 51, en latín, y Tomo III, páginas 3-48, en la traducción francesa de Paul Tannery), Schooten en 1656, R. Simson en 1746.

Contenía, en dos libros, ciento cuarenta y siete teoremas y ocho lemas. Para dar una idea del contenido de esta obra, tomaremos en la Colección de Pappus (Tomo II, edición Hultsch, páginas 668-69) un teorema que no es de los más difíciles.

• Si en el interior de un círculo dado se da un punto y se traza por él una recta sobre la cual se toma un punto exterior al círculo, de modo que el cuadrado que tiene por lado el segmento entre los dos puntos sea equivalente al rectángulo formado con toda la recta y su segmento exterior al círculo, el punto exterior recorrerá una cierta recta.

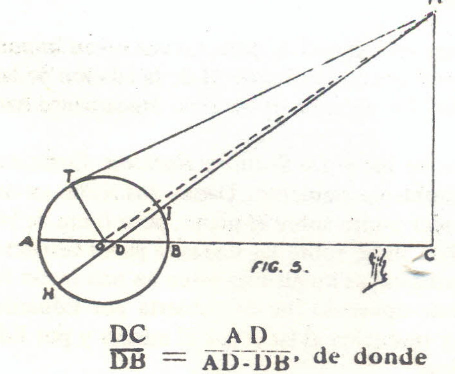


FIG. 5.

He aquí una demostración de este teorema.

Tracemos el diámetro que pasa por D (Fig. 5) y tomemos en su prolongación el punto C tal que $\overline{DC}^2 = AC \times BC$, lo que se reduce en definitiva a hallar una cuarta proporcional

$\frac{DC}{DB} = \frac{AD}{AD-DB}$, de donde $\frac{DC}{BC} = \frac{AD}{DB} = \frac{AD + DC}{DB + BC} \Rightarrow \frac{AC}{DC}$

Levantando una perpendicular al diámetro en C, podemos escribir:

$$\overline{DC}^2 = AC \times BC = (OC + R)\,(OC - R) = \overline{OC}^2 - R^2.$$

Por consiguiente, tomando un punto cualquiera M sobre dicha perpendicular:

$$\overline{MD}^2 - \overline{MC}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{MC}^2 - R^2,$$

o bien, $$\overline{MD}^2 = \overline{OM}^2 - R^2 = \overline{MT}^2 = MI \times MH.$$

Asi pues, todos los puntos de la recta CM constituyen el lugar buscado.

Es oportuno observar que en la época de Apolonio se llamaban *lugares planos* la recta y la circunferencia, y *lugares sólidos* las secciones cónicas. Las otras líneas, consideradas como lugares geométricos, recibían el nombre de *lugares lineales* (Pappus II, p. 660).

5o. *Inclinationum Libri Duo*. Esta obra, mencionada también en la Colección Matemática, contenía una serie de problemas en que se trataba de insertar entre dos líneas dadas un segmento de recta dirigido (*inclinado*) hacia un punto dado. Por ejemplo: dado un rombo, uno de cuyos lados se supone prolongado, insertar en el ángulo externo un segmento dado de recta, en forma tal que su prolongación pase por el vértice opuesto del rombo.

Huygens (Tomo XII de las Obras Completas, pág. 200, edición 1910) indica, entre otras, la siguiente solución:

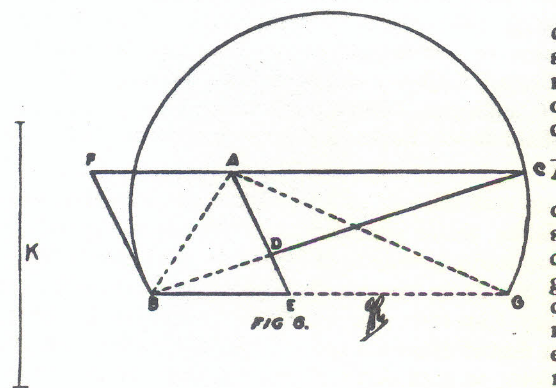


FIG 6.

Tómese AG (fig. 6) de modo que su cuadrado sea igual a la suma de los cuadrados del segmento dado, K, y de la diagonal opuesta al vértice del ángulo en que ha de insertarse el segmento: $\overline{AG}^2 = K^2 + \overline{AB}^2$. Con el radio AG determínese el punto G sobre BG. Sobre BG como cuerda trácese un arco capaz del ángulo BFA. Sea C su intersección con el lado FA prolongado. La recta BC es la solución buscada, es decir, que CD = K. (La demostración, bastante laboriosa, no creemos útil reproducirla aquí).

Finalmente, consta que Apolonio de Perga dedicó también una parte de su producción intelectual a la Teoría de los números, a la Optica, a la Geometría de los poliedros regulares, a la Teoría de los incommesurables, a la Rectificación de la circunferencia y a la Mecánica aplicada.

3.5 - EL TRATADO DE LAS SECCIONES CONICAS

De los ocho libros que constituían el Tratado de las Secciones Cónicas, han llegado hasta nosotros los cuatro primeros en el original griego y los tres siguientes en traducciones árabes. El último libro solo se conoce por los comentarios de la Colección Matemática tantas veces citada. Utilizando estos comentarios, pudo Halley reconstituirlo conjeturalmente. Los principales códices griegos de los cuatro primeros libros son de los siglos XII y XIII (Biblioteca Vaticana, Nacional de París, etc.).

Las primeras ediciones impresas fueron las de Memo (Venecia, 1537) y Commandino (Bolonia, 1566). Estas dos ediciones no contienen más que la traducción latina de los cuatro primeros libros. La edición princeps del texto griego (Oxford, 1710) se debe al gran astrónomo y matemático inglés Edmund Halley. Contiene, además del texto griego de los cuatro primeros libros y su traducción latina, la traducción latina de una traducción árabe de los tres siguientes y la reconstitución o adivinación del último libro (también en latín). La espléndida edición de Halley se ha vuelto desgraciadamente rarísima: *tamraram*, dice Heiberg, *ut etiam immodico pretio vix ac ne vix quidem comparari posset*. La edición de Heiberg (Leipzig, 1891-93) no contiene más que los cuatro primeros libros (en griego y latín). El vacío ha sido llenado gracias a la adaptación admirablemente hecha por T. L. Heath, en lengua inglesa y con notaciones modernas, de toda la obra del célebre sabio alejandrino (Cambridge, 1896). Finalmente, en 1923 (Bruges) apareció una traducción francesa de Paul de Ver Eecke, la que también se extiende a los siete libros conocidos de las Cónicas.

La suma del material contenido en esta obra es enorme. Los siete primeros libros ocupan ya en la traducción de Ver Eecke, recién citada, más de 600 páginas *in-quarto*. Para los que juzgan por el resultado utilitario inmediato el mérito de esta clase de trabajos, debió constituir un raro enigma la vida de este hombre, dedicada a estudios cuya aplicación práctica nadie podía preveer. Con todo, esa aplicación vino al fin. La Astronomía, sin la cual la Navegación, los descubrimientos geográficos, el Comercio marítimo, serían imposibles, tiene por objeto, en gran parte, el conocimiento de las órbitas de los cuerpos celestes, que son curvas de las estudiadas hace dos mil años por Apolonio.

Pero hay en todas las épocas, aún entre los estudiosos y los hombres de ciencia, mentalidades incapaces de admitir este principio, abonado sin embargo por toda la historia de la civilización: que la verdad, cualquiera que ella sea, acaba siempre por ser útil a la humanidad. ¿No era Augusto Compte el que denunciaba todavía el Cálculo de las Probabilidades como "tipo de esas investigaciones puramente especulativas y más o menos vanas en que se complace el bizantinismo de ciertos sabios"? Herejía doblemente imperdonable en quien era a la vez filósofo y matemático.

La primera idea de las Secciones Cónicas parece haber surgido del estudio de un problema célebre en la antigüedad: el problema de la duplicación del cubo. Su solución por medio de la regla y del compás era imposible, y, o bien la aritmética no había adelantado bastante para permitir la simple solución numérica del problema, o esta solución no satisfacía el espíritu esencialmente geométrico de la Matemática griega. Había pues que

buscar otras líneas más complicadas que la recta y el arco de circunferencia para atacar el problema con éxito.

Hipócrates de Quío (segunda mitad del siglo V antes de nuestra era) demostró que el problema de la duplicación del cubo se reduce al de hallar dos medias proporcionales entre dos longitudes dadas.

En efecto, llamando a la longitud de la arista del cubo propuesto, b otra longitud cualquiera, y x y y las medias proporcionales entre a y b, de

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

se deduce

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \times \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b};$$

de donde, si hacemos $b = 2a$,

$$x^3 = 2a^3.$$

La primera de las medias proporcionales entre a y 2 a es pues igual al lado del cubo dos veces mayor que el propuesto.

Pero las ecuaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

equivalen, poniendo en ellas 2a en lugar de b, a las siguientes:

$$x^2 = a\,y \quad , \qquad y^2 = 2\,a\,x \quad , \qquad x\,y = 2\,a^2 \; .$$

Si construimos, con referencia a un sistema rectangular de coordenadas, las curvas representadas por dos cualesquiera de estas ecuaciones, la abscisa de su intersección en el primer cuadrante, nos dará la magnitud buscada.

Tal era, en substancia, la solución Menecmo (contemporáneo de Alejandro Magno o poco anterior a él) según Eutocio (Comentario sobre Arquímedes, edición de Heiberg de las obras de Arquímedes, Tomo III, páginas 92-98).

Menecmo sería pues el inventor de estas curvas, cuya generación mediante secciones planas del cono parece haber demostrado.

Los otros grandes precursores de Apolonio en el estudio de las secciones cónicas, fueron: 1o. Aristeo el Antiguo (anterior de unos treinta años a Euclides), autor de una obra en cinco libros sobre dichas curvas. En esta obra, hoy perdida, se empleaban, posiblemente por primera vez, las designaciones de *sección del cono rectángulo, sección del cono obtusángulo y sección del cono acutángulo*, denominaciones que Apolonio reemplazó después por las de *parábola, hipérbola y elipse*, que son las que todavía se usan. 2o. Euclides, que dejó sobre el tema un tratado en cuatro libros. y 3o., Arquímedes, cuyas contribuciones a la teoría de las cónicas tuvimos ya ocasión de recordar en la última conferencia. Apolonio parece haber utilizado ampliamente a Euclides en la preparación de los primeros cuatro libros de su obra, los cuales forman algo así como un compendio sistemático de los conocimientos anteriores; en tanto que los libros siguientes que, según Zeuthen, constituyen más bien otras tantas monografías separadas, representarían la parte más original y más elevada de la teoría. En cuanto a los trabajos

de Arquímedes, ellos se referían sobre todo a la Geometría de la medida, y no eran mayormente aprovechables para Apolonio, que encaraba preferentemente la Geometría de la forma.

El estudio a fondo y detallado de las Secciones Cónicas de Apolonio, debe hacerse recurriendo a los trabajos de Heiberg, Heath y Ver Eecke, citados antes. Mi propósito es más modesto. Para realizarlo, me valdré principalmente del magistral resumen explicativo de Housel, aparecido en el Tomo III de la segunda serie del Journal de Liouville. A pesar de los años transcurridos, no creo que se haya publicado después nada superior, en su género, a ese trabajo.

Los griegos no emplearon los procedimientos algebraicos hasta una época posterior a la de Apolonio, pero desde mucho antes sabían aplicar la Geometría con extraordinaria habilidad a la demostración de las proposiciones algebraicas y a la solución de problemas que en el Algebra se plantean en forma de ecuaciones de primero y segundo grado. Euclides, en las primeras proposiciones del primer libro de sus Elementos, en las primeras del segundo libro y en muchas del sexto libro, explica esos procedimientos de Algebra geométrica o Cálculo gráfico, muy anteriores a él sin duda, y que el uso frecuente había hecho familiares y casi tan fáciles y rápidos como para nosotros los del Algebra elemental.

Fórmulas tales como

$$a(b+c+d+\ldots) = ab + ac + ac + \ldots\ldots,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2),$$

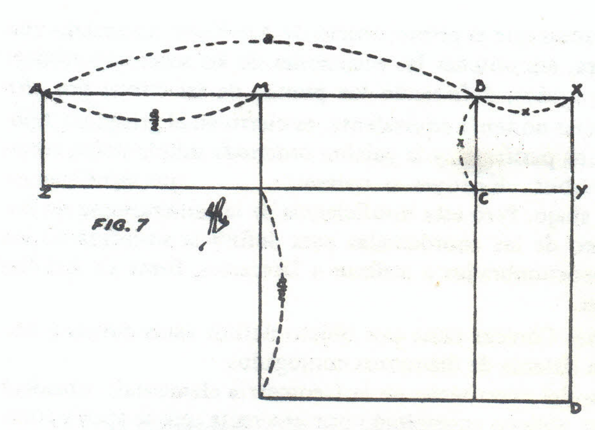
$$a^2 + b^2 = 2\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right\}\quad, \text{etc.},$$

figuran en Euclides con enunciado geométrico.

La investigación de las raíces reales de las ecuaciones de segundo grado, se fundaba en dos tipos de construcción: la aplicación de áreas en exceso y la aplicación de áreas en defecto.

El problema de la aplicación en exceso, puede enunciarse así: *Construir sobre una recta dada AB prolongada, un rectángulo AXYZ de área dada y tal que la diferencia entre él y el rectángulo de igual altura y de base AB sea un cuadrado.*

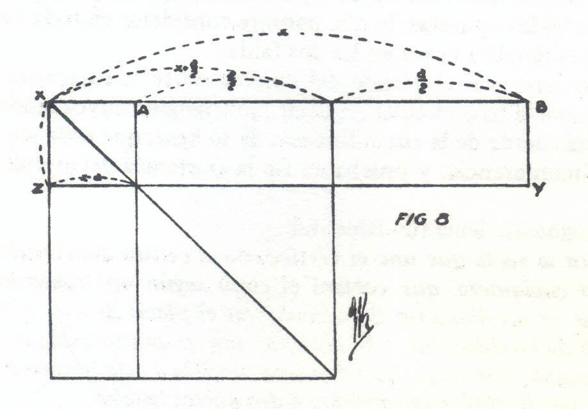
La solución de Euclides coincide en el fondo con la solución algebraica de la ecuación $(x+a)\,x = b^2$, es decir, $x^2 + a\,x = b^2$. Agregando $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ a los dos miembros, el segundo se obtiene geométricamente por el teorema de Pitágoras, bajo la forma de un cuadrado, cuyo lado es $\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, y el primero da $x + \frac{a}{2}$ y, por lo tanto, x.



La figura 7, en que M es el punto medio de AB y $MX = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ es la figura adoptada por Euclides para la resolución del problema.

La solución de la ecuación $(x - a)\,x = b^2$ o $x^2 - a\,x = b^2$, se obtendría mediante una construcción análoga.

Finalmente, el problema de la aplicación por defecto exige, en su enunciado más simple, la construcción sobre una parte A de una recta AB, de un rectángulo AXYZ, de superficie dada, y tal que la diferencia entre él y el rectángulo de igual altura y de base AB sea un cuadrado.



La figura 8 indica la construcción del problema y permite resolver gráficamente la ecuación.

$$ax - x^2 = b^2 \text{ o } x^2 - a\,x + b^2 = 0,$$

a condición de ser $4\,b^2 < a^2$, es decir, a condición de ser reales las raíces de la ecuación.

La presencia de un coeficiente en el primer término de la ecuación, complicaba algo el problema, pero aún así, la solución por Algebra geométrica era posible y se la conocía desde Euclides.

No extrañará pues ahora, que digamos que el primer objeto de Apolonio, alcanzado desde las páginas iniciales de su obra, era obtener las ecuaciones de las secciones cónicas por medio de los diámetros conjugados, definiendo los puntos de las curvas por *abscisas y ordenadas.* La palabra *abscisa* no tenía equivalente, es cierto en el griego de Apolonio, que empleaba en su lugar una perifrasis, y la palabra *ordenada* solo la usaba como adverbio calificando uno de los verbos Καταγω o αναγω, que significan en griego trazar hacia arriba o hacia abajo. Pero esta insuficiencia de la terminología no impide absolutamente que el empleo de las coordenadas para definir la situación de los puntos, invención que estamos acostumbrados a atribuir a Descartes, fuera ya familiar a los contemporáneos de Apolonio.

El primer libro de las Secciones Cónicas tiene por objeto definir estas curvas y obtener sus ecuaciones referidas a un sistema de diámetros conjugados.

Apolonio no se ocupa tan solo del cono recto de la Geometría elemental; considera desde el principio el cono circular oblicuo engendrado por una recta que se apoya constantemente sobre una circunferencia y pasa siempre por un punto. Como además supone la recta generatriz prolongada indefinidamente de uno y otro lado de ese punto, la superficie resultante consta de dos faldas opuestas, lo que permite considerar en toda su generalidad la sección plana que se extiende a la vez en las dos faldas.

Demuestra que todo plano que pase por el vértice del cono y corte la superficie, determina en ella dos rectas y otra en la base circular, es decir, un triángulo cuyos lados son dos generatrices del cono y una cuerda de la circunferencia de su base; que toda sección paralela a esta base es una circunferencia, y prueba en fin la existencia del círculo subcontrario o antiparalelo.

En la proposición 6 enuncia el siguiente lema fundamental:

Por el eje de un cono, o sea por la recta que une el vértice con el centro del círculo de la base, imaginemos un plano cualquiera, que cortará el cono según un triángulo (triángulo por el eje) y cuya base es un diámetro del círculo; en el plano de este círculo tracemos una perpendicular a dicho diámetro, y finalmente, por un punto cualquiera del cono, situado fuera del triángulo por el eje, llevemos una paralela a esta perpendicular; el plano del triángulo por el eje dividirá esta paralela en dos partes iguales..

Este lema se demuestra por triángulo semejantes, sin ninguna dificultad.

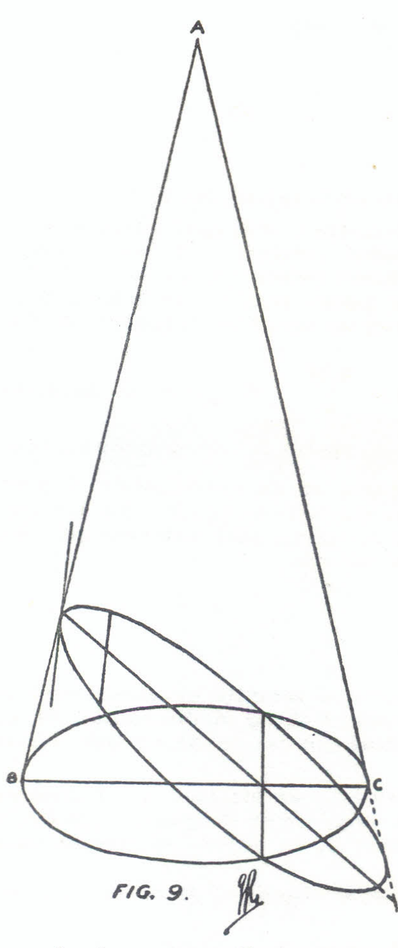


FIG. 9.

Concibamos ahora un plano que corte la base según una perpendicular al diámetro indicado; obtendremos una sección cónica, tal que la intersección de su plano con el del triángulo por el eje, será un diámetro de la misma, pues bisecará, en virtud del lema, una serie de cuerdas paralelas (Fig. 9). Este diámetro de la sección cónica la cortará en el punto común a su plano, al del triángulo por el eje y a la superficie del cono. Si consideramos el círculo que pasa por ese punto y es paralelo a la base del cono, su tangente en dicho punto será también tangente a la sección cónica y paralela a las cuerdas bisecadas por el diámetro que pasa por el mismo punto.

El diámetro, así determinado, de la sección cónica, el cual corta evidentemente uno de los lados del triángulo por el eje que pasa por el vértice del cono, puede cortar el otro lado, o cortar su prolongación en la otra falda del cono, o serle paralelo. En el primer caso la sección será una elipse; en el segundo, una hipérbola; en el tercero, una parábola.

En el caso de la hipérbola, se obtienen así dos ramas de curvas que Apolonio, por primera vez, considera como partes de una misma línea (proposición 14).

Tomemos pues por origen de las coordenadas el punto de la curva que hemos determinado; el diámetro será el eje de las abscisas y la tangente que hemos trazado por el origen será el eje de las ordenadas. Apolonio llega entonces a la ecuación:

$$y^2 = 2px + qx^2 \quad ,$$

por el mismo procedimiento que emplean los textos modernos, es decir, trazando por un punto cualquiera de la curva un plano paralelo a la base del cono, aunque reemplazando, naturalmente, las líneas trigonométricas, desconocidas todavía, por razones entre segmentos. La parábola tiene por ecuación $y^2 = 2px$: es la curva por *igualdad* o *de comparación* (παραβολη = comparación); si q es negativo, es decir, si hay que restar algo, a 2px para tener y^2, se tiene la elipse o curva *por defecto* (comparada con la parábola); en caso de tener que agregar algo a 2px, se tiene la hipérbola o curva *por exceso*. Así quedan justificadas las denominaciones de las tres curvas (otras justificaciones de esta terminología, y especialmente de la designación de la parábola han sido propuestas por Eutocio, Heath, etc.).

Considerando ya la curva (la elipse, por ejemplo) en su plano, independientemente del cono, el autor transporta el origen al punto medio del diámetro y obtiene la ecuación.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

o bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aquí a es la mitad del diámetro transverso y b la mitad del diámetro *recto*, o sea del segundo diámetro paralelo a las ordenadas y conjugado del anterior. Pero esta denominación de diámetro recto (ορΘια διαμετρος) no debe inducirnos a error, haciéndonos creer que los dos diámetros son necesariamente perpendiculares entre sí. Al contrario, como se puede trazar una infinidad de triángulos por el eje, el sistema de referencia es un sistema cualquiera de diámetros conjugados.

Apolonio llama *lado recto* el coeficiente $2p = \frac{2\,b^2}{a}$, y *figura*, el paralelógramo construído sobre el diámetro 2a y el lado recto $\frac{2\,b^2}{a}$, tomado en la dirección del otro diámetro, es decir, de la tangente en su extremidad; 2 b resulta así una media proporcional entre los dos lados de la figura. En las tres secciones, el lado recto es un segmento cuya longitud está determinada por los elementos del cono y la posición del plano secante.

Las ecuaciones ordinarias

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

de la elipse y de la hipérbola hacen ver, por una sencilla consideración de triángulos iguales, que toda cuerda que pase por el punto medio común de los dos diámetros conjugados a y b queda dividida por ese punto en dos partes iguales; dicho punto es pues un *centro*.

Refiriendo siempre las tres secciones cónicas a un sistema de diámetros conjugados, Apolonio busca la ecuación de la tangente en un punto dado de la curva, por un método que, limitándonos al caso de la elipse, se reduce poco más o menos a lo siguiente:

Sean x' y y' las coordenadas de un punto de la elipse; se tiene la relación

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Se demuestra, por una consideración geométrica sencillísima, que cualquier otro punto (x, y) del plano dará

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

según este punto sea exterior o interior a la elipse. Para deducir de ahí la ecuación de la tangente, que es

$$\frac{x\ x'}{a^2} + \frac{y\ y'}{b^2} = 1,$$

bastará observar que, para todos los puntos de esta recta, se tiene

$$\frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b_2} > 1.$$

Y, en efecto, agregando a $\frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b_2}$, $\frac{x'^2}{a_2} + \frac{y'^2}{b_2}$, que es igual a 1, y quitándole $\frac{2\,x\,x'}{a_2} + \frac{2\,y\,y'}{b_2}$, que es igual a 2, el resultado se presentará bajo cualquiera de estas dos formas:

$$\frac{(x - x')^2}{a_2} + \frac{(y - y')^2}{b_2} \text{ o } \frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b_2} - 1,$$

y, como la primera es evidentemente positiva, la segunda lo será también.

Hallada así la ecuación de la tangente, Apolonio deduce de ella una serie de teoremas importantes: que, *en la elipse y en la hipérbola, la distancia del centro al punto en que la tangente corta el primer diámetro, es tercera proporcional a la mitad de este diámetro y a la abscisa del punto de tangencia;* que, *en la parábola, la subtangente es doble de la abscisa;* que *hay una infinidad de diámetros conjugados;* que *los diámetros de la parábola son paralelos entre sí;* etc.

El segundo libro empieza por la teoría de las asíntotas de la hipérbola.

El razonamiento de Apolonio equivale a comparar la ecuación de la curva.

$$\frac{x^2}{a_2} - \frac{y_2}{b^2} = 1,$$

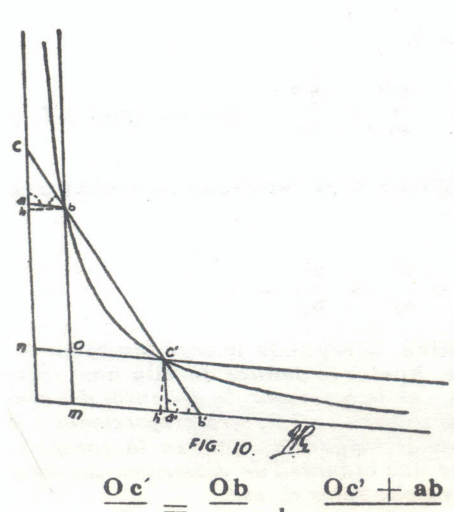
con las ecuaciones

$$\frac{y}{b} = \pm \frac{x}{a}$$

de dos rectas que pasan por el centro, y demostrar que estas rectas no cortan la curva y que toda recta comprendida en el ángulo de ellas, que también contiene el eje de las x, corta en cambio la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas muestran que, a la misma abscisa, corresponden ordenadas iguales de las asíntotas, pero dirigidas en sentido contrario. Tomando pues por ejes coordenados un diámetro, correspondiente a una tangente dada, y el conjugado (paralelo a dicha tangente), se deduce que toda tangente a la hipérbola, limitada por las asíntotas, queda dividida en partes iguales por los puntos de tangencia.

En seguida (proposición 7), considerando una tangente a una cónica cualquiera y una paralela a esta tangente, Apolonio demuestra que la recta que une el punto de contacto con el medio de la cuerda es un diámetro de la curva, es decir, una recta que biseca todas las cuerdas paralelas a la dada. De los



dos teoremas recién enunciados deduce luego que los segmentos interceptados en una secante por una rama de la hipérbola y sus asíntotas, son iguales, y llega en fin a la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas, es decir, a demostrar que, si se toman dos puntos cualesquiera en la curva y se consideran las coordenadas de esos dos puntos tomando por ejes las asíntotas, el rectángulo de las coordenadas de uno de esos puntos será equivalente al rectángulo que corresponde al otro punto. Basta, para demostrarlo, considerar en la figura 10 la igualdad de los triángulos a b c y a' b' c' y la semejanza de los triángulos a' b' c' y O b c'. Los puntos b y c' son los puntos dados en la curva; las rectas m b' y n c las asíntotas.

$$\frac{Oc'}{ab} = \frac{Ob}{ac}, \quad \frac{Oc' + ab}{ab} = \frac{Ob + ac}{ac}, \quad \frac{nc'}{ab} = \frac{mb}{a'c'}$$

$$nc' \times a'c' = ab \times mb.$$

De la semejanza de los triángulos rectángulos a h b y a' h' c', en que ang. a=áng a', resulta que en la igualdad anterior se pueden sustituir a' c' por c' h' y ab por bh, lo que permite afirmar que las asíntotas se acercan indefinidamente a la curva.

Después de una serie de propiedades interesantes de las secciones cónicas, expuestas y demostradas en las proposiciones siguientes de este libro, hasta la 43, Apolonio se ocupa de resolver algunos problemas en que supone la cónica *dada*, es decir, completamente construida:

1o. Dada una cónica hallar un diámetro de ella (problema indeterminado). Se trazan dos cuerdas paralelas y se unen sus puntos medios;

2o. Hallar el centro de la elipse o de la hipérbola. Se obtiene por la intersección de dos diámetros;

3o. Hallar los ejes. El problema de la parábola, que solo tiene un eje, se resuelve trazando una cuerda perpendicular a la dirección común de sus diámetros, y por su punto medio una recta paralela a aquella dirección común. El diámetro así obtenido será el eje de la parábola. Para trazar los ejes de la elipse, se describirá haciendo centro en el centro de la curva, una circunferencia que la corte, lo que determinará cuatro puntos. Trazando las bisectrices de los ángulos en el centro determinados esos cuatro puntos, se tendrán los dos ejes. Una construcción análoga se empleará para la hipérbola.

En fin, Apolonio demuestra por reducción al absurdo, la unicidad del eje o del sistema de dos ejes, a menos naturalmente que la curva sea una circunferencia.

Housel tacha de poco científico el procedimiento de Apolonio para trazar los ejes de una cónica, tal vez porque ese procedimiento admite *a priori* la existencia de un eje; la asunción es lícita sin embargo, porque resulta inmediatamente de las últimas proposi-

ciones del libro anterior (proposiciones 52 - 58). Así, por ejemplo, tomemos el procedimiento del problema de las proposiciones 56, 57 y 58 del primer libro: *Dado el parámetro y un diámetro cuyo ángulo de inclinación con sus cuerdas conjugadas suponemos también dado, hallar la elipse* (caso general que el mismo Apolonio reduce el caso particular de ser recto el ángulo de inclinación, y por consiguiente conocido un eje). Como variando los datos hallaríamos todas las elipses posibles, entre éstas estará la elipse dada. Bastaría pues hacer coincidir las dos figuras, para determinar en la elipse propuesta su eje, cuya existencia queda por lo tanto fuera de duda.

El segundo libro termina con diversos problemas sobre las tangentes.

Las proposiciones del tercer libro pueden distribuirse en varios grupos. Las primeras 23 conducen al teorema siguiente: *Tracemos por un punto O situado sobre el plano de una cónica, dos secantes cualesquiera que corten la curva en los puntos A B, la primera, y C D, la segunda. Por otro punto arbitrario O' tracemos otras dos secantes respectivamente paralelas a las dos primeras y que corten a la curva en A' y B', C' y D'; se tendrá entonces:*

$$\frac{OA.\ OB}{OC.\ OD} = \frac{O'\ A'.\ \ O'\ B'}{O'\ C'.\ \ O'\ D'}$$ **(Véase Heath, prop. 59).**

El enunciado no es en realidad tan general, pues supone que las secantes son paralelas a un sistema de diámetros conjugados. A pesar de esta restricción, se ve que el *teorema de los segmentos* podría atribuirse a Apolonio con más razón que a Newton, cuyo nombre lleva generalmente. Por lo demás, la restricción señalada es más aparente que real; ella no existe en la mayoría de los lema que sirven de base al teorema mismo. La única generalización introducida por Newton en el enunciado no se refiere a las secciones cónicas, sino que consiste precisamente en extenderlo a todas las curvas algebraicas.

Las diez proposiciones que vienen después, se refieren a polos y polares, y se resumen en el siguiente enunciado: *Toda secante a una cónica, que pase por el punto de intersección de dos tangentes a la misma es dividida armónicamente por la cuerda de contacto.*

Llamando *C* el punto de concurso de las dos tangentes, *A* y *B* los puntos en que la secante trazada por *C* corta la curva y *D* la intersección de la secante con la cuerda, la traducción algebraica del enunciado es

$$\frac{C\ A}{C\ B} = \frac{D\ A}{D\ B}$$

Tras la demostración de algunas otras propiedades interesantes pero menos fundamentales de las cónicas, Apolonio inicia en la proposición 45 el estudio de los focos designados por la perifrasis σημεια εΚ της παραβοληζ γενηΘεντα que Housel traduce por *puntos de comparación* y que podría también traducirse, como lo hacen Heiberg Heath y Ver Eecke, por *puntos resultantes de la aplicación*, expresión que fluye más naturalmente de la definición de Apolonio, la cual, por otra parte, solo se refiere a las cónicas provistas de centro, excluyendo la parábola cuyo foco Apolonio no menciona nunca ni parece haber conocido.

Entre diversos teoremas desarrollados en esta sección del tercer libro, conviene destacar el que sirve todavía de base a la teoría de las tangentes, a saber: *los radios vectores, trazados desde los dos focos a un punto de la curva, forman ángulos iguales con la*

normal, si se trata de una elipse, o con la tangente, si se trata de una hipérbola; y este otro que se utiliza hoy para definir los focos: *el eje focal es igual a la diferencia de los radios vectores, en la hipérbola, y a su suma, en la elipse.*

Los tres primeros libros, que acabamos de analizar, contienen las generalidades básicas de la Geometría de las Cónicas, en los libros siguientes la parte de invención original es mayor, y los temas de cada libro más especializados. Así, el cuarto libro podría titularse: *De las intersecciones y contactos de las cónicas.* Apolonio no pretende sin embargo haber descubierto la mayoría de los teoremas que enuncia en este libro, pero sí haberlos demostrado mejor que sus antecesores. Se comprende en efecto que, en investigaciones de esta naturaleza, el examen inteligente de las figuras debió desde mucho tiempo antes, sugerir numerosos enunciados; pero se concebirá también todas las dificultades con que tropezaban los antiguos matemáticos para demostrar esos enunciados con rigor suficiente, si se recuerda cuáles eran las deficiencias de los procedimientos auxiliares a que debían recurrir. En primer lugar, no conocían las ecuaciones de las secciones cónicas, sino referidas a coordenadas paralelas a un sistema de diámetros conjugados y con el origen en el centro o en la extremidad de uno de ellos. Ahora bien, cuando se comparan dos cónicas, es preciso que los ejes coordenados puedan ocupar cualquier posición con respecto a una de las curvas. Pero lo que más complicaba entonces el estudio de estos problemas, era la ignorancia de casi toda la teoría de las ecuaciones y de la eliminación.

Los métodos empleados aquí por Apolonio ya no presentan ningún interés directo, por muy ingeniosos que sean, y su interés histórico tampoco es tan grande que justifique otra cosa que un corto resumen. Housel se contenta con decir que todas las demostraciones de este libro son del tipo de reducción al absurdo y se basan en el principio de la división armónica, agregando los enunciados de algunas proposiciones:

Dos cónicas no pueden encontrarse más que en cuatro puntos:

Si tienen un punto de tangencia, solo pueden cortarse en otros dos puntos:

Si tienen dos puntos de contacto, no pueden tener más puntos comunes:

Dos parábolas no pueden tener más de un punto de tangencia;

Si una parábola es exterior a una rama de hipérbola, no puede tener más de un punto de tangencia con ella (prop. 30);

Una parábola no puede tener más de un punto de tangencia interior con una elipse o circunferencia (prop. 31).

El 5o. Libro trata de las líneas rectas de longitud mínima o de longitud máxima que pueden trazarse hasta una cónica desde ciertos puntos, es decir, de las normales a estas curvas. El tema comprende una parte de la teoría de los radios de curvatura y de las evolutas, teoría tan fácil de desarrollar cuando se dispone del Cálculo infinitesimal, pero que obliga, al querer tratarla sin el auxilio del análisis moderno, como forzosamente debió hacerlo nuestro autor, a prodigar los recursos más sutiles de la Geometría y del Cálculo geométrico.

De las setenta y siete proposiciones que constituyen el quinto libro, mencionaremos únicamente: la 8, en que se demuestra que la subnormal de la parábola es constante, e igual a la mitad del lado recto; las 58 - 63, en las cuales se resuelve con toda generalidad

el problema de trazar la normal a una cónica por cualquier punto exterior o interior a ella; y en fin, las proposiciones 68 - 71, que pueden condensarse en este enunciado:

De dos tangentes a una cónica trazadas por un punto exterior, situadas del mismo lado del eje focal y medidas desde ese punto hasta el de tangencia correspondiente, será menor aquella cuyo punto de tangencia esté más cerca del eje focal.

No nos detendremos en el Libro Sexto, que trata de la igualdad y semejanza de las cónicas, y que hace uso de las definiciones y procedimientos que aún se emplean en nuestro tiempo.

He aquí la definición que da Apolonio (definición II) de *cónicas semejantes*: Si comparamos dos elipses, dividamos sus ejes focales en el mismo número cualquiera de partes respectivamente proporcionales, y por los puntos de división tracemos rectas perpendiculares a dichos ejes; las dos elipses serán semejantes, si las ordenadas correspondientes a los mismos puntos de división son proporcionales a las abscisas contadas desde un vértice. La misma definición se aplica a las hipérbolas semejantes, pero habrá entonces que llevar las divisiones del eje focal más allá de cada vértice para tener puntos de cada curva. En las parábolas, la misma definición conduce (proposición 11) a la comprobación de que *todas las parábolas son semejantes entre sí*. Las proposiciones 26 y 27 establecen la semejanza de dos secciones paralelas del mismo cono. El resto del libro contiene diversos problemas cuyo objeto consiste en colocar una cónica dada sobre un cono dado, problemas siempre posibles, salvo, en el caso de la hipérbola, que la relación del eje focal al lado recto sea inferior a la relación entre el cuadrado del eje del cono y el cuadrado del radio de su base (proposición 29).

El Séptimo Libro es, como hemos dicho antes, el último de los que han llegado hasta nosotros. Este libro completa la teoría de los diámetros conjugados y contiene los dos famosos teoremas descubiertos por Apolonio y que llevan todavía su nombre en todos los tratados modernos de Geometría analítica. Las demostraciones que de ellos dá su autor serían interesantes, por basarse en consideraciones absolutamente diferentes de las que ahora se emplean, pero son demasiado largas, especialmente la del primero, para tener cabida en este brevísimo resumen. Sus enunciados, todos ustedes los recuerdan:

Primer teorema: *En la elipse es constante la suma, y en la hipérbola la diferencia, de los cuadrados de dos diámetros conjugados:*

Segundo teorema: *El paralelogramo construido sobre dos diámetros conjugados de la elipse o de la hipérbola, es constantemente equivalente al rectángulo construido sobre sus ejes.*

En conclusión, a pesar de dos mil años transcurridos con exceso desde que Apolonio escribió su gran tratado, las omisiones o deficiencias que pueden señalarse en éste, al compararlo con los textos de Geometría analítica de nuestros días, son en suma bien pequeñas.

Terminaré con la elocuente apreciación hecha por Gino Loria, de la obra que acabamos de analizar. Apolonio, dice, (Le Scienze Esatte nell'Antica Grecia, pag. 385), considera primero las cónicas en el espacio, pero pasa enseguida a estudiarlas sobre el plano, en general como lugares de puntos, pero también incidentalmente (aunque no de un modo explícito) como envolturas.

3.6 - PAPPO DE ALEJANDRIA

El más grande historiador de las Matemáticas, Mauricio Cantor, empieza su clásica obra con estas palabras: "Hacía tiempo ya que el globo terrestre se había enfriado lo bastante para permitir el desarrollo de la vida orgánica sobre su superficie ..."

Es, sin duda, tomar las cosas de muy lejos. Cuando inicié en este mismo hospitalario salón de actos públicos de la Facultad de Ingeniería mis conferencias sobre la Historia de las Matemáticas, que ahora voy a continuar por honrosa invitación del Instituto de Estudios Superiores, anticipé que mi intención no era presentar la exposición completa de esta disciplina. Dejé, en efecto de lado toda la Prehistoria de las Matemáticas, la cual, en un tratado metódico y extenso como el de Cantor, ocupa su lugar oportuno, pero que, en una serie de conferencias familiares sin otra pretensión que la de instruir de las cosas más esenciales e interesantes, podía muy bien suprimirse con ventaja para la brevedad y amenidad de la enseñanza.

Entré pues de lleno, tras una sumarísima reseña de los orígenes de la Aritmética y la Geometría en la India y en el Egipto, a ocuparme de las Matemáticas griegas a partir de Pitágoras y sus inmediatos precursores. Me había propuesto entonces, y me propongo ahora, agrupar los hechos históricos más importantes alrededor de algunas grandes figuras de matemáticos, esperando dar así mayor atractivo al tema gracias a la introducción en él, siempre que sea posible, del elemento biográfico y humano. Dediqué las conferencias siguientes a los tres representantes más destacados de la época alejandrina: Euclides, Arquímedes y Apolonio, que dieron a la Matemática griega ciento cincuenta años de esplendor nunca igualado hasta el advenimiento de los grandes renovadores y creadores del siglo XVII.

Después de Euclides (año - 300), el compilador y organizador de la Geometría que ahora llamamos elemental, de Arquímedes (muerto en - 212), el más genial de los matemáticos de la antigüedad, y de Apolonio (- 170) que metodiza y en parte inventa la Geometría de las Cónicas, empieza una época de acentuada decadencia, llamada con justicia edad de plata de la Matemática griega.

Es curioso observar que esta decadencia de las Matemáticas no coincide en el tiempo con la de otras ramas del saber y del arte. En tanto que para casi todas las demás actividades del pensamiento, el descenso se inicia con los triunfos de Filipo y Alejandro y el sometimiento de Atenas al dominio macedónico; para la cultura matemática se abre, al contrario, poco más tarde, con el desmembramiento del imperio alejandrino, el más brillante período de su historia en la antigüedad.

La anemia que extenúa implacablemente la Filosofía, la Literatura y las Artes, se explica por la falta de temas inspiradores en la nueva organización política del mundo helénico y por la transformación del lenguaje que sustituye al dialecto castizo del Atica un idioma artificial, sin espontaneidad, ignorado o mal conocido por el pueblo. Salvo pues algunos poemitas de Antología, joyas en su género, y el gran nombre de Teócrito, paisano y contemporáneo de Arquímedes, la historia literaria alejandrina casi no registra más que nombres oscuros de compiladores, gramáticos, comentadores, eruditos, hombres de biblioteca, en fin, incapaces de producir nada verdaderamente original y grande.

Pero aquellas circunstancias, adversas en los dominios de la Filosofía y de la Literatura, poca influencia podían tener en la evolución de las ciencias matemáticas. En cambio, la admirable organización del Museo de Alejandría, la enorme riqueza de su biblioteca y las facilidades de vida que aseguraba para los estudiosos la protección inteligente de los primeros Tolomeos, fomentaron eficazmente el progreso de las ciencias y en especial de las matemáticas. Nada tiene pues de extraño que, al amparo o bajo la influencia de aquel maravilloso instituto de cultura, precursor de nuestras modernas universidades, haya florecido un grupo de sabios eminentes. Con todo, a partir del segundo siglo antes de nuestra era, las ciencias abstractas empiezan a pasar de moda. El espíritu utilitario de los romanos –el pueblo amatemático por excelencia, según Gino Loria– se infiltra por todo el mundo civilizado y provoca el rápido decaimiento de la investigación pura.

El hecho, cualquiera que sea su explicación, es evidente. De Apolonio a Diofanto (más de 400 años) la producción matemática, en calidad por lo menos, y comparada con la de épocas pretéritas, es ínfima.

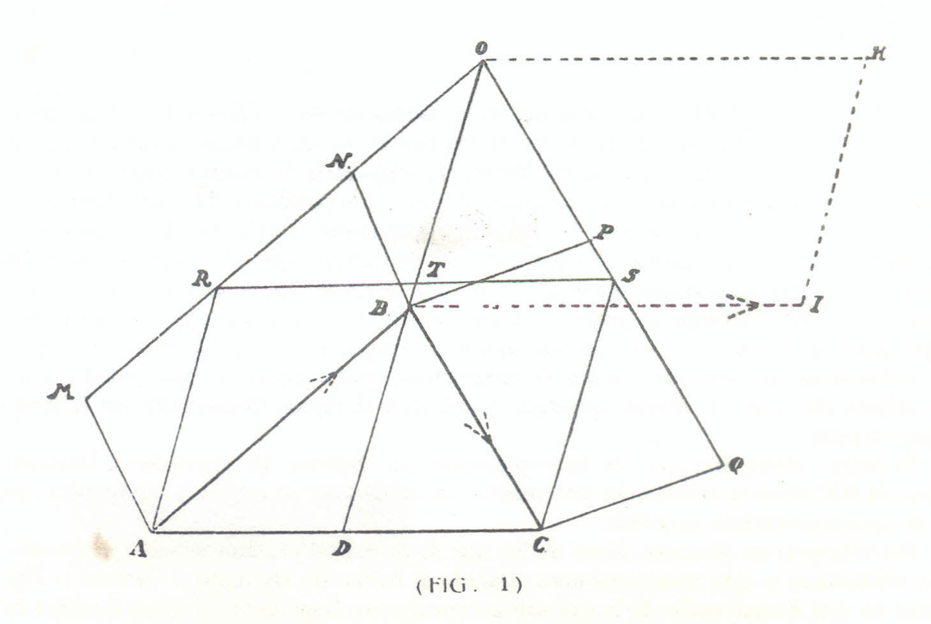
Recordemos, no obstante, fuera de los que se ocuparon preferentemente de cuestiones aritméticas y que mencionaremos después al hablar de Diofanto a Gémino (- 70), autor de una Enciclopedia de la que sobreviven algunos fragmentos, y quizá también de una introducción a la Astronomía que lleva su nombre; a Nicomedes (posiblemente anterior a Gémino) e inventor de la concoide; a Diocles (contemporáneo tal vez del anterior), inventor de la cisoide; a Herón (probablemente anterior a nuestra era) presunto autor de la fórmula planimétrica que da el área de un triángulo en función de sus lados.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad ;$$

a Teón de Esmirna (100 a 150?), recopilador mediocre, conocido por su obra, que sólo tiene de interesante el título: "Exposición de conocimientos matemáticos útiles para la lectura de Platón"; y sobre todo a Pappo Alejandrino (tercer siglo de nuestra era) a quien debemos una vasta y utilísima Colección de fragmentos comentados de otros matemáticos, de muchos de los cuales ignoraríamos hasta el nombre si en ella no figuraran. Es seguro, por lo demás, que algunas de las proposiciones enunciadas y demostradas por Pappo le pertenecen. Ellas revelan, en conjunto, el grado de adelanto a que había llegado la Matemática, y hacen de la Colección –felizmente conservada casi íntegra– un documento de extraordinario valor.

El análisis completo de una obra que ocupa tres gruesos volúmenes (edición de Hultsch), nos tomaría demasiado tiempo. Sólo citaremos de ella algunos pocos extractos que nos parecen de especial importancia histórica.

Entre las proposiciones más fáciles merece destacarse la siguiente generalización del teorema de Pitágoras.



(FIG. 1)

Construyamos sobre los lados *AB* y *BC* de un triángulo cualquiera, hacia el interior o hacia el exterior del triángulo (el segundo caso es el de la figura), los paralelogramos cualesquiera *ABNM* y *BCQP*; determinemos la intersección *O* de las prolongaciones de *MN* y *QP*, y tracemos por *A* y *C* las paralelas *AR* y *CS* a *BO*. La figura *ARSC* es un paralelogramo, porque los segmentos *AR* y *CS*, además de paralelos son iguales entre sí, por ser cada uno de ellos igual y paralelo a *BO*.

Pero $ARTD \simeq AROB \sim ABNM$, y análogamente $DTSC \simeq BCQP$

Luego, $ACSR = ARTD + DTSC \simeq ABNM + BCQP$.

Observando que *DT* y *BO*, iguales a *AR*, son iguales entre sí, podremos sustituir al paralelogramo *ACSR* el *BIHO* en el que *BI* se ha tomado igual y paralelo a *AC*, y escribir $BIHO \simeq ABNM + BCQP$.

Chasles ha hecho notar que de esta proposición surge inmediatamente un teorema de Mecánica, al que Varignon daría su nombre catorce siglos más tarde. En efecto, supongamos que *AB* y *BC* representan dos fuerzas *BI* representará su resultante. Si en el mismo plano de las fuerzas se nos da un punto *O*, interior o exterior a ellas, trazando por *O* la recta *OB* y las paralelas *OM* y *OQ* a las fuerzas, es fácil comprobar que el momento de la resultante con respecto a *O* es igual a la suma de los de las componentes con respecto al mismo punto.

Otro ejemplo de anticipación no menos curioso es el que encontramos en el VII libro de la Colección, en un pasaje no muy claro pero que sólo puede interpretarse en estos términos: "Las figuras generadas por una rotación completa, tienen entre sí una relación compuesta de lo que gira y de las rectas trazadas semejantemente entre el eje de rotación y los baricentros de las figuras móviles": proposición injustamente atribuída a Guldin, que la publicó trece siglos más tarde.

La presencia en la Colección de proposiciones que figurarían en Euclides, Arquímedes o Apolonio, si estos matemáticos las hubieran conocido, permite asignar dos límites (muy separados, es cierto) a la fecha de su descubrimiento. Para poner un ejemplo sencillísimo: el "teorema de las tres perpendiculares" se encontraría sin duda en los Elementos de Euclides si él mismo u otro sabio de su época o anterior a él lo hubiera ya descubierto, hasta podemos afirmar que su colocación estaría en el libro XI, a continuación de la proposición 8: "Si dos rectas son paralelas entre sí, y una de ellas es perpendicular a un plano, la otra será también perpendicular al mismo plano". Esta proposición que en los tratados modernos de Geometría elemental sirve de base a la demostración del teorema de las tres perpendiculares es, inversamente, considerada como su corolario, no aparece en Euclides ni en ninguna obra conocida anterior a la Colección; podemos, por consiguiente, asegurar que el teorema fue inventado después de Euclides y antes de Pappo. Este da (libro VI, prop. 42) la demostración que sigue, menos elegante sin duda que las puramente geométricas adoptadas por los modernos.

Si $\alpha\beta$ es la perpendicular al plano π en el cual se halla la recta $\gamma\delta$, el triángulo $\alpha\beta\gamma$ es rectángulo y, por consiguiente:

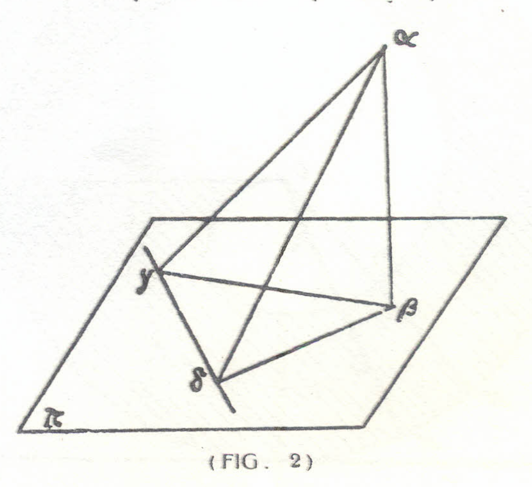
$$\overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\alpha\beta}^2 + \overline{\beta\gamma}^2.$$

Si, por otra parte, hemos trazado $\beta\delta$ perpendicular a $\gamma\delta$:

$$\overline{\beta\gamma}^2 = \overline{\beta\delta}^2 + \overline{\delta\gamma}^2,$$

de donde $$\overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\alpha\beta}^2 + \overline{\beta\delta}^2 + \overline{\delta\gamma}^2,$$

y finalmente $$\overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\delta\gamma}^2;$$



(FIG. 2)

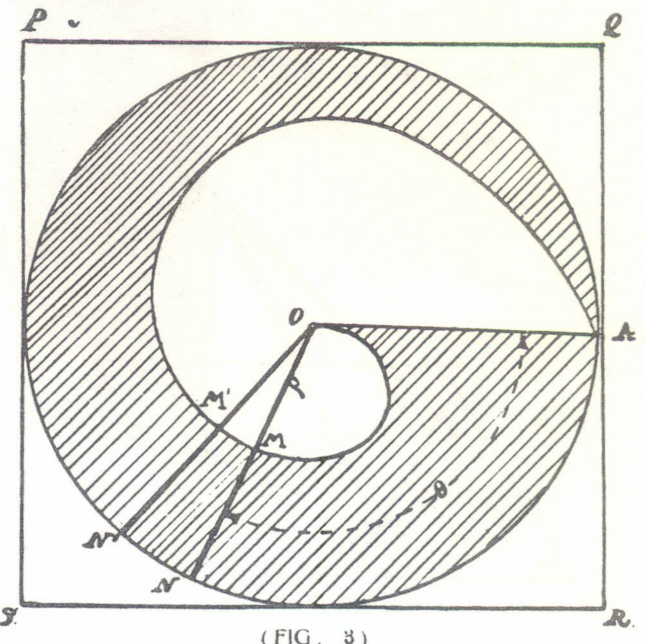
lo que demuestra que el ángulo $\alpha\delta\gamma$ es recto, o que $\alpha\delta$ es perpendicular a $\delta\gamma$.

Terminemos esta rápida ojeada a la famosa Colección con el ejemplo de una curva inventada por Pappo (Libro IV, prop. 30) que lleva su nombre y es una de las primeras curvas gausas conocidas.

Sea un punto que se mueve con movimiento uniforme sobre un meridiano de esfera, desde el polo hacia el ecuador, mientras el meridiano mismo se mueve también uniformemente, alrededor del polo y sin abandonar la superficie de la esfera. Si las velocidades de translación del punto y de giro del meridiano son tales que, al llegar el móvil al ecuador, el meridiano ha girado de 360 grados y vuelto así a su posición inicial, el punto móvil habrá descrito una curva esférica análoga a la espiral de Arquímedes.

Pappo demuestra una propiedad en extremo curiosa de esta curva, a saber: *que el área del hemisferio guarda igual relación con el área esférica limitada por el meridiano en su posición inicial y por la espiral misma, que la existente entre un cuadrante de círculo y el correspondiente segmento circular.*

La demostración original de Pappo es muy laboriosa y prolija (ocupa más de dos páginas en la edición de Hultsch). La que se obtiene aplicando el Cálculo Integral es sencillísima, pero no ofrece, naturalmente, ningún interés histórico. Lo daremos, sin embargo, para no dejar sin prueba un teorema digno de admiración por su dificultad, e interesante por ser el primer caso de cálculo de una superficie esférica parcial, ya que la misma complanación de triángulos esféricos, problema aparentemente más sencillo, sólo se obtuvo muchos años después como observa Cantor. Simplificaremos también, aunque no esencialmente, el enunciado.



(FIG. 8)

Si suponemos proyectado sobre el plano del ecuador el hemisferio en que se desarrolla la espiral, la superficie considerada por Pappo es la que se proyecta en blanco en la figura. Pero si nos proponemos calcular el área de la superficie cuya proyección aparece rayada y cuyos límites son la espiral, el ecuador y el meridiano móvil en su posición inicial (y final), y si elegimos coordenadas esféricas de polo *O* y de eje polar *OA*, el elemento de área *MM'N'N* tendrá por expresión: $d\sigma = \frac{d\Theta}{2\pi} \times z$ (**siendo** z **el área de la zona esférica limitada por el ecuador y el paralelo de M). Luego, designado con** p **el radio vector, igual a la colatitud, y con** r **el radio de a esfera:** $d\sigma = \frac{d\Theta}{2\pi} \times 2\pi r^2 \cos p = 4 r^2 . \cos p . dp$, **puesto que** $d\Theta = 4\, dp$.

Y finalmente: $\sigma = 4 r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos p . dp = 4 r^2 = PQRS.$

El área buscada es igual a la del cuadrado circunscripto al ecuador

3.7 - DIOFANTO Y EL DESARROLLO DE LA ARITMETICA

Pappo de Alejandría es el último gran geómetra de la antigüedad. Su probable contemporáneo, Diofanto de Alejandría o Alejandrino, dedicó su actividad científica exclusivamente al estudio de problemas aritméticos.

La biografía de Diofanto es un enigma. Todo lo que puede afirmarse con evidencia histórica irrefutable es que Diofanto escribió sus obras después de - 150 y antes de 300 de nuestra era (casi quinientos años de incertidumbre). Entre estos dos extremos, la fecha que parece más plausible es hacia fines del tercer siglo de nuestra era.

Su nombre mismo ha sugerido dudas (Διόφαντος o Διόφαντης?), lo que hacía decir a Cossali el autor de *Origini trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra* (Parma 1797-1799). "Sula desinenza del nome comincia lo diversitá tra gli scritori." Pero se ha acabado por dar la preferencia a la forma Διόφαντος, que es la única usada por los modernos, y la que figura en la casi totalidad de los manuscritos cuando emplean el nominativo o acusativo, y no el genitivo que podría derivarse de una u otra forma del nominativo.

Otros detalles biográficos verosímiles: que vivió o se educó en Alejandría, como lo expresa su sobrenombre, y que murió a los 84 años según parece resultar de un epigrama de la Antología Griega (el 126 del libro XIV), que puede, sin embargo, entenderse de más de un modo.

La Aritmética había sido poco cultivada por los Griegos. El amor característico del pueblo heleno por las formas concretas y visibles, lo inclinaba naturalmente a la Geometría. Su horror invencible a todo proceso infinito lo hizo rechazar fuera del dominio de la ciencia los números que no pueden presentarse por un conjunto finito de cifras y a los que dio el nombre que aún conservan, de irracionales (αλογος, que no guarda una razón con la unidad); poniendo así una barrera al progreso de la Aritmética. Otro obstáculo bastante serio al desenvolvimiento de esta doctrina lo constituía el sistema de numeración en uso. El sistema de numeración hablada era en la Grecia antigua tan perfecto casi como el nuestro, como que se basaba en los mismos principios: nombres especiales para las unidades y para las decenas, otros para las centenas hasta mil, que recibía también una designación especial, como diez mil, la unidad más alta que consideraban en su lenguaje corriente los Griegos; quienes —a diferencia de los Indios— parecen haber tenido una cierta repugnancia por los grandes números, tal vez por la imposibilidad de concebirlos claramente.

La numeración escrita, en cambio, sin ser tan torpe y absurda como la romana, estaba lejos de la perfección del sistema indio introducido en Occidente por los Arabes, con sus dos inventos básicos del valor de posición y del empleo de un signo para indicar el valor nulo. La dificultad resultante de no disponer de un sistema perfecto de numeración no debe con todo exagerarse. El hábito acaba por atenuar los inconvenientes y aprovechar las ventajas. Basta para convencerse de la verdad de esta observación comparar el sistema inglés de pesas y medidas con nuestro sistema métrico decimal. La economía de trabajo y tiempo obtenida con el empleo de este último no es, en definitiva, tan considerable como podía esperarse. Por lo demás, podemos suponer que, cuando era necesario, tam-

bién se echaba mano de otros sistemas de numeración más apropiados. De ello nos da un ejemplo Arquímedes en su famoso "problema arenario", creando exprofeso un sistema de numeración bastante elástico para permitirle representar y designar números que nosotros tendríamos que escribir con más de 80.000 millones de millones de cifras. El uso, en fin, tan generalizado de los ábacos contribuía a facilitar las operaciones aritméticas.

El sistema de numeración usual entre los matemáticos griegos, desde la época elejandrina, consiste en utilizar como cifras las letras del alfabeto jónico ampliado con tres signos no usados en la escritura. Para evitar confusiones, las letras empleadas como cifras llevaban un acento a la derecha de la última o un trazo horizontal encima de todas. La yuxtaposición de las unidades de diferentes órdenes se hacía, como en nuestro sistema, de mayor (a la izquierda) a menor (a la derecha).

α' β' γ' δ' ε' ϛ' ζ' η' θ'	1 a 9
ι' κ' λ' μ' ν' ξ' ο' π' ϙ'	10 a 90
ρ' σ' τ' υ' φ' χ' ψ' ω' ϡ'	100 a 900

Las tres letras suplementarias se llaman, stigma, que representa el 6, koppa, que representa 90, y sampi, que representa 900.

Los nueve primeros millares se indicaban con las letras α, β, . . . θ marcadas a la izquierda con un pequeño trazo inferior ͵α = 1000, ͵β = 2000, etc.

Ejemplos ͵α π λ β' = ͵$\overline{\alpha\ \pi\ \lambda\ \beta}$ = 1832; ͵δ α' = ͵$\overline{\delta\alpha}$ = 4001.

Más allá del número 9999 se usaba el signo M, letra inicial de μυριάς = miríada = 10.000, escribiendo generalmente sobre el signo el número representativo de las unidades de este orden. Ejemplo: $\overset{,\delta\tau o\beta}{M}$ = 43.720.000. Diofanto simplifica esta notación representando las miríadas por un punto que separa su número del de las unidades de orden inferior que siguen. Ejemplo: λγ . ͵αψος = 331776.

Las fracciones se solían representar de diversos modos. Si tenían por

numerador la unidad, sólo se escribía el denominador, con doble acento a la derecha; asi κγ'' significaba $\frac{1}{23}$. Si el numerador era diferente de la unidad, se escribía antes del denominador y en la forma usual, v.g. $\beta' \kappa\gamma'' = \frac{2}{23}$. Diofanto emplea en este caso otra notación, que consiste en escribir el denominador sobre el numerador, separados por una raya horizontal, al revés de lo que hacemos ahora. Por ejemplo $\frac{\iota\gamma}{\iota} = \frac{10}{13}$. Para la fracción $\frac{1}{2}$, Diofanto emplea el signo L`.

Los griegos hacían una distinción muy marcada entre la práctica de los cálculos aritméticos, a la que llamaban Logística, y el estudio de las propiedades generales de los números, al cual reservaban el nombre de Aritmética. La primera exposición metódica de la Logística y de la Aritmética, la hallamos en los Elementos de Euclides, pero los procedimientos allí empleados son casi siempre puramente geométricos para las demostraciones, y gráficos para la resolución de los problemas. La teoría de las proporciones y la de las ecuaciones de 2o. grado (con exclusión naturalmente de las raíces negativas e imaginarias) forman la parte más interesante del Algebra geométrica desarrollada en los Elementos euclidianos. En ellos figuran también algunas proposiciones de la Teoría de los números (Aritmología), como la que afirma la infinitud de los números primos (IX, 20).

En los cinco siglos que median entre Euclides y Diofanto, muy pocos nombres pueden citarse en el campo de la Aritmética: Eratóstenes (el de la criba), Hypsicles (más astrónomo que matemático) y Nicómano (100 de nuestra era) que inaugura el estudio de la Aritmética con independencia de la Geometría. Este discípulo retardado de Pitágoras (Νικόμαχος ὁ πυθαγορικός lo llama Pappo) escribió una Introducción aritmética (Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική) que, a través de la adaptación latina de Boecio (480-524), fue popular en toda la Edad Media. La obra es, sin embargo, de muy escaso valor, poco o nada original y carece de todo rigor científico, puesto que, a guisa de demostración, se conforma con verificar la comprobación numérica en unos cuantos casos particulares de cada teorema. Otras veces, el enunciado es el que aparece falto de generalidad, como sucede con la fórmula

$$(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 3) + \ldots + (n^2 + n + 2n + 1) = (n+1)^3$$

que permite obtener un cubo cualquiera como suma de varios números impares sucesivos y que se demuestra con sólo observar que hay $n + 1$ términos en la progresión aritmética del primer miembro y que la semisuma de sus términos extremos es $n^2 + 2n + 1$ $(n+1)^2$, fórmula que Nicómano podía haber establecido generalizando algunos casos particulares muy simples que estudia. Señalemos en fin como síntoma del interés que despertaba la Aritmética en las generaciones que precedieron y siguieron a Diofanto, la moda de proponer en estilo versificado, en forma de pequeños poemas o epigramas, problemas numéricos, de los que la sola Antología Palatina nos ha conservado cuarenta

y siete (entre los cuales figura el aludido antes referente a la edad alcanzada por Diofanto). Tannery los ha reunido en su edición acompañándolos de escolios antiguos que aclaran el sentido de los enunciados y dan las soluciones de los problemas.

La orientación de los estudios matemáticos hacia los problemas aritmológicos y algebraicos, –estos últimos apenas esbozados o más bien presentidos bajo el ropaje de los números,– encuentra su expresión más completa en Diofanto, postrera manifestación del genio matemático griego.

Diofanto parece haber escrito sólo dos obras: la Aritmética, de cuyos trece libros no han llegado a nosotros más que los seis primeros, y un tratadito sobre números poligonales, del cual se conserva un fragmento.

El estudio de la obra del sabio alejandrino es hoy relativamente fácil por virtud de dos publicaciones fundamentales: 1o. la sabia edición de Paul Tannery (texto griego con erudita anotación crítica, traducción latina y escolios de autores griegos antiguos, colección de epigramas aritméticos, comentarios, etc.) y 2o. la obra maestra de T. L. Heath, adaptación moderna del texto diofantino, precedida de una interesantísima introducción que (junto con un largo suplemento y copiosas notas textuales) contiene cuanto puede pedirse para la exacta comprensión y apreciación de Diofanto. Los que ignoran las lenguas antiguas pueden también recurrir a la traducción francesa publicada en 1926 por Paul Ver Eecke. Y en fin las obras clásicas de Historia de las Matemáticas (Cantor, Loria, etc.) son siempre dignas de consulta.

El más viejo manuscrito, y a la vez el más perfecto conocido, se halla en la Biblioteca Nacional de Madrid. Es el llamado Codex Matritensis (siglo XIII), que sirvió principalmente de base a la edición de Tannery. De las ediciones impresas, anteriores a las que acabamos de citar, sólo mencionaremos la aparecida en 1621 (texto griego y traducción latina), de Bachet de Mézèriac, autor de la obrita de Aritmética recreativa *"Problémes plaisants et délectables qui se font par les nombres"*, tantas veces reproducida. Fue en los márgenes de un ejemplar de esta edición de Diofanto, y con ocasión de los problemas del texto mismo, que Fermat escribió los enunciados de muchas de sus más célebres proposiciones aritmológicas.

La Aritmética de Diofanto no es absolutamente un tratado metódico, sino una colección de problemas, algunos algebraicos por su naturaleza y por la forma de resolución que hoy les daríamos, y otros –la mayor parte– afines con la rama de las Matemáticas llamada por los modernos Análisis indeterminado. Y aún se acostumbra atribuir el nombre de *diofantinas* a las ecuaciones indeterminadas de primer grado, cuyo tipo más sencillo es $ay - bx = c$, en que a, b y c son números enteros positivos dados y x e y son las incógnitas cuyos valores han de ser también enteros y positivos: designación impropia porque justamente de este tipo de ecuaciones no se ocupa Diofanto para nada.

Tanto los problemas determinados, dependientes en general de una ecuación de 2.° grado, como los indeterminados que plantea y resuelve Diofanto, no son probablemente de él sino en parte. Las ecuaciones de 2.° grado ya habían sido consideradas por Euclides y resueltas, apelando a procedimientos geométricos y gráficos, es cierto, pero con toda generalidad. Y algunos problemas indeterminados de 2.° grado habían sido estudiados por Pitágoras;

por ejemplo el de dividir un cuadrado en la suma de dos cuadrados. La solución para números enteros que Proclo atribuye a Pitágoras está contenida en la fórmula $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2$, sólo aplicable cuando el cuadrado propuesto puede escribirse bajo la forma $\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$. La solución de Diofanto (Libro II, prob. 8) es aplicable a todos los casos, pero admitiendo como buena cualquier solución racional. Digamos desde ahora en qué consiste dicha solución, y así iremos entrando en relación más íntima con nuestro autor. Si llamamos, traduciendo en álgebra moderna su razonamiento, a^2 el cuadrado propuesto y x^2 una de sus partes, la otra será $a^2 - x^2$. Si hacemos $a^2 - x^2 = (mx - a)^2 = m^2 x^2 + a^2 - 2amx$, obtenemos la ecuación de 1.er grado en x: $(m^2 + 1)x = 2am$, que da para x el valor racional $\frac{2am}{m^2+1}$ y, por consiguiente, suministra infinitas soluciones para cada caso; pues hay evidentemente un número infinito de valores de m que satisfacen a la única condición necesaria: $m > 1$. Es curioso notar que la solución de Diofanto: $a^2 = \left(\frac{2am}{m^2+1}\right)^2 + a^2\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$, no difiere de la de Pitágoras, si esta última se generaliza haciendo $a = p\,\frac{n^2+1}{2}$; los valores de los sumandos bases resultan entonces pn y $p\,\frac{n^2-1}{2}$ que guardan con a la misma relación que en la fórmula de Diofanto, si en ella hacemos $m = n$. El expediente empleado aquí y en muchos otros problemas de la "Aritmética", consiste en igualar la expresión de una de las cantidades que se buscan a otra expresión que, conteniendo una variable arbitraria, pueda recibir infinitos valores, y en formar además esta segunda expresión de modo que, igualada a la primera, dé una ecuación capaz de reducirse al 1.er grado en la incógnita elegida.

La verdadera originalidad de Diofanto está quizá en haber introducido ciertas notaciones generales, definiendo así una transición entre los dos grados de desarrollo que Nesselmann distingue en la historia del Algebra con los nombres de **Algebra retórica** y de **Algebra simbólica**: es decir empleo del lenguaje sin abreviaciones y empleo exclusivo de símbolos para expresar tanto las cantidades en toda su generalidad como las operaciones que se han de hacer con ellas. Diofanto ocuparía el grado intermediario (*Algebra sincopada*), gracias al uso sistemático de abreviaturas y de signos para algunas de las operaciones más frecuentes y para la representación de la incógnita del problema.
Hasta la época de Vieta (François Viète) y su Introducción al Arte analítica "In Ar-

tem analyticam Isagoge" (1591), no puede considerarse realmente constituída el Algebra con el uso corriente de letras para representar las cantidades y de signos especiales para indicar las operaciones y las relaciones matemáticas. Los progresos en ese sentido fueron muy lentos.

Los signos $+$ y $-$ se imprimen por primera vez en la Aritmética de Johann Widmann (1489); Robert Recorde *(The Whetstone of Witte, 1557)* usa por primera vez el signo de igualdad $=$ compuesto de dos largas líneas horizontales *(bicause noe .2. thynges can be moare equalle)*; Harriot (Thomas) introduce, con la significación que tienen desde entonces, los signos de desigualdad *(Artis analyticae Praxis, Londres, 1631)*, etc. etc.

Diofanto emplea para expresar la igualdad simplemente las palabras griegas ταῦτα ἴσα (esto es igual), o alguna abreviatura de la segunda palabra, pero nunca un signo especial. Sólo dispone de un símbolo para representar las cantidades desconocidas, lo que le impide plantear sistemas de ecuaciones simultáneas con varias incógnitas. Emplea signos diferentes para la incógnita y sus potencias:

ϛ (ἀριθμός) representa la incógnita *(x)*; Δ^{Y} (δύναμις), su cuadrado (x^2); K^{Y} (κύβος), su cubo (x^3); etc. El signo para la resta es ⋔, pero no dispone de otro signo para la adición. El coeficiente se pospone a la cantidad que multiplica y no se omite cuando es igual a la unidad: ϛ $\bar{\alpha}$ β significa $x + 2$, pues si escribiéramos ϛ $\bar{\beta}$, esto significaría $2x$. La ausencia de signo para la adición obliga asimismo a anteponer al término independiente la abreviación $\overset{o}{M}$ de μονάδες (unidades); por ejemplo: $\Delta^{Y} \bar{\sigma} \overset{o}{M} \beta$ quiere decir $200 x^2 + 2$, mientras que $\Delta^{Y} \bar{\sigma} \beta$ equivale a $202 x^2$. Otros ejemplos: (VI,6) Δ^{Y} ϛ ϛ γ ἴσ. $\overset{o}{M}$ ζ $(6x^2 + 3x = 7)$; (IV,27) K^{Y} η ϛ η ⋔ $\Delta^{Y} \bar{\alpha} \overset{o}{M} \bar{\alpha}$ $(8x^3 - x^2 + 8x - 1)$, escribiendo primero todos los términos positivos y después los negativos.

Se ha dicho que una ciencia no es más que una lengua bien hecha. Si las Matemáticas son las más perfectas de las ciencias, deben en gran parte esa primacía a su sistema de notaciones. Esto es cierto sobre todo del Algebra, cuyo progreso rapidísimo en los tiempos modernos hubiera sido imposible sin el pasaje operado en la época del Renacimiento (siglos XV y XVI), desde la segunda etapa, del lenguaje sincopado (etapa representada por Diofanto), hasta la tercera, del lenguaje simbólico puro, pasaje que se continúa en nuestros días. Fuera de su rol de economizadora de pensamiento, la notación simbólica ha ido introduciendo más generalidad en el concepto de número, hasta hacer aceptables no sólo el número negativo y el irracional, que Diofanto rechaza calificándolos de imposibles o absurdos ἀδύνατος, ἄτοπος, sino también el imaginario, del que los antiguos no tenían ni sospecha. Todos estos conceptos surgen por decirlo así espontáneamente de las fórmulas literales; lo que hacía exclamar a Euler que su pluma

era a veces más inteligente que su cerebro.

Privado de un sistema cómodo y completo de notaciones, Diofanto tiene que reemplazar a fuerza de ingenio el instrumento poderoso de economía de trabajo intelectual que le falta. Pero lo hace a costa de la brevedad y de la sencillez, aún en los casos en que alcanza por excepción al rigor y a la generalidad. No hay que pensar, en efecto, que Diofanto en el texto original sea un autor fácil. La solución del problema de la descomposición de un cuadrado en la suma de otros dos, tan simplemente encontrada hace un momento mediante la aplicación de las notaciones modernas, es en el original griego a tal extremo larga y enrevesada, que justifica la maldición de un lector impaciente, puesta al margen de este problema en el manuscrito de la Biblioteca Nacional de Madrid, y que Tannery ha recogido como curiosidad en el 2o. volumen de su edición (pág. 260).

Otra circunstancia que dificulta el estudio de la "Aritmética", de Diofanto es la falta de una clasificación metódica de los 189 problemas que comprende. "Hay más de cincuenta clases de problemas, dice Hankel en su *Historia de las Matemáticas en la Antigüedad y en la Edad Media*, que se siguen unos a otros sin más principio visible de agrupación que el de facilitar la solución de los últimos problemas con la obtenida para los que preceden. El primer libro se concreta a las ecuaciones determinadas. Los que siguen, hasta el quinto, contienen casi exclusivamente problemas indeterminados, en los que se trata de convertir en cuadrados o cubos ciertas expresiones que encierran dos o más variables elevadas a la primera o segunda potencias. Finalmente, el sexto libro se ocupa de los triángulos rectángulos considerados del punto de vista aritmético, proponiendo problemas en que una función lineal o cuadrada de los lados ha de resultar un cuadrado o un cubo. Nada más podemos decir de esta variada serie de problemas, si no queremos estudiar separadamente cada una de las cincuenta clases en que pueden repartirse. Casi más variadas aún que los problemas son las soluciones de los mismos; y nos sería absolutamente imposible pasar en revista de una manera medianamente completa los diversos aspectos que van tomando los procedimientos de Diofanto. De métodos más comprensivos y generales, no se descubre traza en nuestro autor: cada cuestión exige su método especial, que ya no será aplicado ni siquiera en aquellos problemas que están íntimamente aliados a ella. Así el lector marcha atropelladamente de una cuestión a otra, como a través de un juego de acertijos, sin poder detenerse a gozar de una sola, tratada a fondo. Diofanto deslumbra pero no satisface. Es maravillosamente ingenioso, hábil, perspicaz, infatigable; pero no sabe penetrar profundamente hasta la raíz del asunto que trata. Es un brillante virtuoso en el *arte* inventado por él del Análisis indeterminado, pero la *ciencia* le debe, directamente al menos, pocos métodos. Tal es la impresión general, concluye Hankel, que he sacado de un completo y repetido estudio de la Aritmética de Diofanto."

Limitémonos pues por nuestra parte a dar, en pocos ejemplos, una idea siquiera fragmentaria del contenido de su obra.

El examen del primer libro demuestra que Diofanto sabía resolver todas las ecuaciones de 2o. grado, tanto las que, por transposición o simplificación, pueden reducirse a la igualdad de dos monomios (ecuaciones puras), con las de la forma completa (ecuaciones mixtas), $ax^2 \pm bx \pm c = o$ (a, b y c positivos), con excepción naturalmente del caso $ax^2 + bx + c = o$, que

conduciría a valores negativos de la incógnita.

Ejemplo (I,27). Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (notación de Heath):

$$\gamma + \eta = 2\,a,$$

$$\gamma\eta = B.$$

Diofanto elige aquí como incógnita, pues la pobre notación de que dispone le impide operar con dos incógnitas a la vez, la semi-diferencia de γ y η. De

$$\gamma + \eta = 2\,a \quad \text{y} \quad \gamma - \eta = 2\,x,$$

se deduce por suma y resta miembro a miembro:

$$\gamma = a + x, \quad \eta = a - x, \qquad \text{y por consiguiente:}$$

$$\gamma\,\eta = (a + x)\,(a - x) = a^2 - x^2 = B.$$

Esta ecuación es del primer tipo, y puede resolverse inmediatamente, permitiendo escribir:

$$\gamma = a + x = a + \sqrt{a^2 - B} \quad \text{y} \quad \eta = a - x = a - \sqrt{a^2 - B}.$$

No es nada probable que Diofanto supiera resolver ecuaciones de 3.er grado. Sólo una vez ocurre en la "Aritmética" una de éstas ecuaciones (VI, 17):

$$x^2 + 2\,x + 3 = x^3 + 3\,x - 3\,x^2 - 1$$

Diofanto deduce que x es igual a 4 sin decir cómo. Pero, mediante simplificaciones que él usa corrientemente, la ecuación toma la forma:

$$x^3 + x = 4\,x^2 + 4,$$

que por la supresión del factor común $x^2 + 1$, fácil de descubrir, lo llevó sin duda al resultado $x = 4$.

Las ecuaciones indeterminadas de 1er. grado no figuran, como ya lo hicimos notar, en la "Aritmética". Diofanto no exigía para las incógnitas valores enteros, ni se preocupaba de hallar todas las soluciones posibles, bastándole generalmente calcular una de ellas. El problema de las ecuaciones indeterminadas de 1er. grado encarado en esa forma, resultaba demasiado fácil para ser interesante.

Veamos en cambio, algunos ejemplos de ecuaciones indeterminadas de 2o. grado. El problema se plantea invariablemente como investigación del valor o de los valores (positivos y racionales siempre) que han de atribuírse a una incógnita x para que una o dos funciones de la forma $A\ x^2 + B\ x + C$ sean cuadrados de números racionales. Hay pues que resolver una o dos ecuaciones del tipo: $A\ x^2 + Bx + C = y^2$. Pasando a casos más particulares, Diofanto demuestra que la ecuación incompleta (o pura) $A\ x^2 + C = y^2$ tiene solución: 1o. cuando A es positivo y cuadrado; 2o. cuando C es positivo y cuadrado; 3o. cuando $A + C$ es positivo y cuadrado, es decir, cuando $x = 1$ satisface la ecuación. Demuestra también que en el 3er. caso hay un número infinito de soluciones (2o. de los lemas que preceden a VI, 12). Esta última observación es interesante, porque en general Diofanto se contenta, como acabamos de decirlo, con una solución, aunque el problema las comporte en número infinito. Además, la demostración es típica y vale la pena de que la analicemos. Sean 3 y 6 los valores de A y B (Diofanto razona siempre sobre números determinados) y representemos por $\pi^2 + 2\pi + 1 = (\pi + 1)^2$ el cuadrado (x^2) que se busca. Multiplicado por 3 y aumentado en 6 debe dar también un cuadrado (y^2). Tenemos pues: $3\pi^2 + 6\pi + 9 =$ cuadrado. Si ponemos el 2.° miembro bajo la forma $(3 - m\pi)^2$, la ecuación en π será reducible al 1.^{er} grado:

$$3\pi^2 + 6\pi + 9 = 9 + m^2\pi^2 - 6m\pi \text{ o } (m^2 - 3)\pi - 6(m + 1) = 0$$

de donde $\pi = \dfrac{6(m+1)}{m^2 - 3}$, y para cada uno de los infinitos valores racionales posibles de m tendremos un valor racional de π, y por lo tanto de $x = \pi + 1$. Si hacemos por ejemplo $m = 3$, resulta $\pi = 4$, y $x = 5$; y en efecto

$$3.5^2 + 6 = 81 = 9^2.$$

Un caso de ecuación completa (o mixta) puede verse en el problema VI, 6: Hallar un triángulo rectángulo (en el sentido aritmético) de lados racionales, tal que su área más uno de los catetos resulte igual a un número dado. Sea, nos dice Diofanto, el número dado 7, y representemos los lados del triángulo por $3x$, $4x$, $5x$ $[(5x)^2 = (3x)^2 + (4x)^2]$. La ecuación a resolver es: $6x^2 + 3x = 7$ o $6x^2 + 4x = 7$. Es necesario, para que x sea racional, que el cuadrado de la mitad del coeficiente de x más el producto del coeficiente de x^2 por el término independiente, sea un cuadrado: en notación moderna

$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - A\,C}$ o $\sqrt{B^2 - 4\,A\,C}$ debe ser racional. Esta observación demuestra que nuestro autor conocía prácticamente la fórmula general de las ecuaciones de 2.° grado: $x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A}$. En el caso del problema el radical, igual a $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 42}$, si se elige el cateto menor o igual a $\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 42}$, si se elige el cateto mayor, es irracional; los valores de la forma $3\,x$, $4\,x$, $5\,x$ para los lados del triángulo no son pues admisibles. Pero este ensayo, aparentemente inútil, le sirve a Diofanto para comprobar que el triángulo rectángulo que se busca, ha de ser tal que el cuadrado de la mitad de un cateto más el séptuplo del área resulte un cuadrado. Quiere decir que representando la relación de los catetos del modo más general posible, llamándolos 1 y m, se ha de verificar que

$\frac{1}{4} + 3\,\frac{1}{2}\,m =$ cuadrado, o, multiplicando por 4, que es también un cuadrado:

$$\left.\begin{aligned} 14\,m + 1 &= \alpha^2, \\ m^2 + 1 &= \beta^2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

y además: (ver segunda ecuación)

y restando: $$14\,m - m^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

El sistema (1) puede pues reemplazarse por este otro:

$$14\,m + 1 = \alpha^2$$
$$m\,(14 - m) = (\alpha + \beta)\,(\alpha - \beta)$$

A este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitos, agreguemos la ecuación $\alpha + \beta = m$, y reemplacemos la última de las ecuaciones que lo forman por $14 - m = \alpha - \beta$; tendremos finalmente el sistema

$$14\,m + 1 = \alpha^2,$$
$$\alpha + \beta = m,$$
$$\alpha - \beta = 14 - m.$$

Las dos últimas ecuaciones nos dan por adición el valor racional 7 para α, valor que, sustituído en la primera, da $m = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$.

Los lados del rectángulo son pues: 1, $\frac{24}{7}$, $\sqrt{1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{25}{7}$ o sea

7, 24, 25, o más en general: 7π, 24π, 25π.

La condición del problema se expresa por

$$84\pi^2 + 7\pi = 7, \quad \text{o} \quad 12\pi^2 + \pi = 1,$$

de donde: $$\pi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 48}}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

y los lados del triángulo son: $\frac{7}{4}$, 6, $\frac{25}{4}$.

El procedimiento seguido en la resolución de este problema y que podría llamarse de falsa posición, es frecuente en la "Aritmética" de Diofanto.

Hemos dicho que Diofanto no resuelve sino en algún caso especial y muy sencillo ecuaciones con una sola incógnita de grado superior al 2o. En el análisis indeterminado, al contrario, suele tratar ecuaciones con dos incógnitas de 3o. 4o. y hasta 6o. grado. Los problemas en que aparecen estas ecuaciones son de dos clases: 1o. cuando se requiere que una función de x, de la forma $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + K_2 + L$, sea igual a un cuadrado (y^2) y 2o. cuando una función de la misma forma ha de ser igual a un cubo (y^3). En las ecuaciones de los problemas de la primera clase, el exponente de x no excede nunca a 6; en las que corresponden a problemas de la 2a clase el exponente de x no excede a *3* (salvo un caso o dos). El artificio de que se vale Diofanto para resolver las ecuaciones de la 1a. clase consiste en hacer y^2 igual a una apropiada función de x.

Ejemplo VI, 18: Hallar un triángulo rectángulo tal que su área, sumada con su hipotenusa, dé un cubo, y que su perímetro sea un cuadrado.

Hagamos iguales a 2 y a x los catetos; el área será x, y la hipotenusa un cubo menos x. Tenemos pues que hallar un cubo tal que, agregándole dos unidades, se convierta en un cuadrado. Llamemos $m - 1$ la base del número cúbico; entonces $m^3 - 3m^2 + 3m + 1$ será igual a un cuadrado, y si suponemos este cuadrado igual a $\left(\frac{3}{2}m + 1\right)^2$, la ecuación anterior se convierte en $m^3 - \frac{21}{4}m^2 = 0$, que dá $m = \frac{21}{4}$. El cubo resulta igual a $\left(\frac{21}{4} - 1\right)^3 = \left(\frac{17}{4}\right)^3 = \frac{4913}{64}$. La hipotenusa es así igual a $\frac{4913}{64} - x$, y como su cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, podemos escribir $\left(\frac{4913}{64} - x\right)^2 = x^2 + 4$, de donde $x = \frac{24\,121\,185}{628\,864}$ y la hipotenusa igual a $\frac{4913}{64} - \frac{24\,121\,185}{628\,864} = \frac{24\,153\,953}{628\,864}$.

Para ejemplo de la segunda clase puede servir el Problema IV, 27: "Hallar dos números tales que su producto menos cada uno de ellos dé un cubo".

Cuando se tiene una ecuación indeterminada de la forma $a^3 x^3 + B x^2 + C x + d^3 = y^3$, se puede igualar y a un polinomio en x de modo que en la ecuación en x que entonces resulta desaparezcan el término en x^3 y el término independiente, o bien los términos en x^3 y en x^2, o en fin el término en x y el independiente. Al resolver este problema, Diofanto parecería ignorar u olvidar los dos últimos procedimientos, por más que en el problema IV, 25 ha empleado incidentalmente uno de ellos. En efecto, he aquí como razona: empieza por igualar uno de los números, que designaremos con x_1, a 8 veces la incógnita; tenemos así $x_1 = 8x$; hace luego el segundo número (digamos x_2) igual a $x^2 + 1$. Entonces resulta $x_1 x_2 = 8x^3 + 8x$, $x_1 x_2 - x_1 = 8x^3 = (2x)^3$ y $x_1 x_2 - x_2 = 8x^3 - x^2 + 8x - 1$, que habría que igualar a un cubo; lo que, dice Diofanto, es imposible. Y es cierto que para hacer que desaparezcan el primero y el último términos, hay que poner $8x^3 - x^2 + 8x - 1 = (2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$ o $11x^2 + 2x = 0$, de donde $x = -\frac{2}{11}$ y $x_1 = -\frac{16}{11}$, valores negativos inaceptables, o mejor dicho inexistentes para Diofanto. Pero hagamos $8x^3 - x^2 + 8x - 1 = \left(2x - \frac{1}{12}\right)^3 = 8x^3 - x^2 + \frac{1}{24}x - \frac{1}{12^3}$, y obtendremos

$$\left(8 - \frac{1}{24}\right)x - \left(1 - \frac{1}{12^3}\right) = 0, \text{ que da } x = \frac{1 - \frac{1}{12^3}}{8 - \frac{1}{24}} = \frac{1\,727}{13\,752},$$

valor racional y positivo. Análogamente, poniendo

$$8x^3 - x^2 + 8x - 1 = \left(\frac{8}{3}x - 1\right)^3 = \frac{512}{27}x^3 - \frac{64}{3}x^2 + 8x - 1,$$

o sea $\left(-8 + \frac{512}{27}\right)x^3 - \left(\frac{64}{3} - 1\right)x^2 = 0$, se obtiene $x = \frac{549}{296}$,

racional y positivo también. Diofanto resuelve de todos modos el problema, pero alterando las primeras hipótesis con el fin de conseguir, sin cambiar la expresión de $x_1 x_2 - x_1$, otra expresión para $x_1 x_2 - x_2$ que resulte un cubo para valores positivos de x. Hace entonces $x_1 = x^2$ y $x_2 = 8x + 1$, lo que da $x_1 x_2 - x_1 = 8x^3 = (2x)^3$, y $x_1 x_2 - x_2 = 8x^3 + x^2 - 8x - 1$ que igualado a $(2x - 1)^3$, lleva, para calcular x_1 a la ecuación $8x^3 + x^2 - 8x - 1 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, equivalente a la ecuación simple $13x^2 - 14x = 0$, cuya raíz x es igual a $\frac{14}{13}$.

Un expediente muchas veces usado por Diofanto, consiste en la introducción de una incógnita auxiliar única, cuando el planteo directo del problema obligaría a emplear dos incógnitas: cosa imposible dentro del sistema de notaciones adoptado.

Así, en el Problema VI, 1: "Dado un número, dividirlo en la suma de dos cubos cuyas bases tengan por suma otro número dado". El planteo directo nos impondría la resolución del sistema

$$\pi^3 + \eta^3 = 2\,a \quad , \quad \pi + \eta = 2\,b\,.$$

Diofanto supone 2 a = 370 y 2 b = 10, y representa por $5 + x$ y $5 - x$ los números buscados. Se tiene pues en una sola ecuación con una sola incógnita:

$$(5 + x)^3 + (5 - x)^3 = 370 \quad o \quad 30\,x^2 + 250 = 370,$$

que permite calcular x; $x = \sqrt{\frac{120}{30}} = 2$: y por lo tanto los números buscados son 7 y 3.

Empleando notaciones generales, $(b + x)^3 + (b - x)^3 = 2\,a$, o $3\,b\,x^2 + b^3 = a$. Y el problema sólo tiene solución si $x = \sqrt{\frac{a - b^3}{3\,b}}$ es racional. Con los datos adoptados por Diofanto, $\frac{a - b^3}{3\,b} = \frac{185 - 125}{15} = 4$ es un cuadrado perfecto.

La elección de esos datos indicaría, con asombro de Loria, que Diofanto conocía el modo de hallar dos números *a* y *b* tales que $\frac{a - b^3}{3\,b}$ sea un cuadrado. Esta cuestión, infantil para nosotros era sin duda difícil para Diofanto; pero lo más probable es que nuestro hábil alejandrino, después de establecer la ecuación: suma de los cubos = $30\,x^2 + 250$, que resulta de tomar 2 b arbitrariamente igual a 10, haya tomado, también arbitrariamente, $x = 2$ y hallado el valor correspondiente de 2 a igual a 370. La admiración de Loria no parece muy motivada en este caso.

En el texto de la "Aritmética" se invocan algunos teoremas generales que se dan por conocidos, ya sea refiriendo el autor a una colección de Porismas, (vocablo que, entre otros significados, tiene precisamente el de teorema

general), publicado posiblemente por el mismo Diofanto y que se ha perdido, ya sea omitiendo toda referencia o explicación Algunos de esos teoremas generales ofrecen un vivo interés. Así, en el Problema V, 16 se recuerda un porisma cuyo enunciado, aunque aparece incompleto en el texto de los manuscritos, no puede ser otro que el siguiente: "La diferencia de dos cubos cualesquiera es siempre convertible en la suma de otros dos cubos".

Podemos desarrollar la demostración en la siguiente forma. Siendo a^3 y b^3 los cubos dados ($a > b > o$), representemos por $B - b$ y $a - kB$ los números buscados, cuyos cubos deben dar una suma igual a $a^3 - b^3$.

De $(B - b)^3 + (a - kB)^3 = a^3 - b^3$ sacamos la ecuación $B^3(1 - k^3) + 3B^2(ak^2 - b) + 3(b^2 - a^2 k)B = 0$.

Si sujetamos k a la condición $b^2 - a^2 k = 0$ o $k = \frac{b^2}{a^2}$, esta ecuación se simplifica y da inmediatamente el valor de B: $B = \frac{3a^3 b}{a^3 + b^3}$. Llamando x, y os números pedidos:

$$x = \frac{b(2a^3 - b^3)}{a^3 + b^3}, \quad y = \frac{a(a^3 - 2b^3)}{a^3 + b^3}$$

La solución anterior, que se debe a Viète, no es aceptable si $a^3 < 2b^3$ o $\frac{b}{a} > \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

En efecto, si $a^3 < 2b^3$, y resulta negativa, y, en vez de la suma de dos cubos, tendríamos nuevamente la diferencia de dos cubos, con lo que la solución del problema no habría adelantado nada, aparentemente.

Fermat hizo notar, empero, que en este segundo caso, en que se obtiene $a^3 - b^3 = x^3 - y^3$ (x y y positivos), aplicando al nuevo par de números x y y el procedimiento de Viète, puede obtenerse la solución del problema. Según su costumbre omite toda demostración, considerando además sólo un caso particular: $a = 5$, $b = 4$ (a^3, por consiguiente, menor que $2b^3$). Las fórmulas de Viète dan entonces

$$5^3 - 4^3 = \left(\frac{248}{63}\right)^3 - \left(\frac{5}{63}\right)^3 .$$

y como $\left(\frac{248}{63}\right)^3 > 2\left(\frac{5}{63}\right)^3$, podemos efectivamente transformar la última diferencia de cubos en una suma de cubos.

El ejemplo no podría, con todo, generalizarse. Si la razón entre los números $b\,(2\,a^3 - b^3) = a'$ y $a\,(2\,b^3 - a^3) = b'$ se aproxima suficientemente a la unidad, resultará $a'^3 < 2\,b'^3$. El proceso de Viète puede pues no dar resultado, aunque se aplique n veces consecutivas. Pero es fácil ver que, en todos los casos, el procedimiento, reiterado un número *finito* de veces, acaba por conducir a la suma de dos cubos deseada.

Hagamos, para demostrarlo, $\dfrac{b}{a} = \varepsilon$, $\dfrac{b'}{a'} = \dfrac{a\,(2\,b^3 - a^3)}{b\,(2\,a^3 - b^3)} = \varepsilon'$, etc.; tendremos $\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \dfrac{2\,\varepsilon^3 - 1}{\varepsilon^2\,(2 - \varepsilon^3)} < \varepsilon$, puesto que $2\,\varepsilon^3 - 1 < 2\,\varepsilon^3 - \varepsilon^6$. Luego, $\varepsilon' < \varepsilon^2$. Análogamente $\varepsilon'' < \varepsilon'^2 < \varepsilon^4$, etc. y por consiguiente, para cierto n finito: $\varepsilon^{(n)} = \dfrac{b^{(n)}}{a^{(n)}} < \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

La "Aritmética" enuncia expresamente o supone conocidas otras proposiciones generales interesantes; en especial algunas pertenecientes a la Teoría de los números. A varios de estos teoremas aritmológicos se refieren las notas famosísimas de Fermat escritas, muchas de ellas, en los márgenes de su ejemplar de Diofanto.

Citaremos solamente la que encierra el llamado *gran teorema de Fermat*, puesta frente al problema II, 8 de la "Aritmética" *(dividir un número cuadrado en la suma de otros dos también cuadrados)*. "Por otra parte, reza la nota en cuestión, es imposible dividir un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados o, generalizando, una potencia cualquiera, con excepción del cuadrado, en la suma de dos potencias del mismo exponente. He descubierto, agrega el sabio tolosano, una prueba maravillosa de este aserto, pero el margen no es bastante grande para contenerla." Y desde hace 250 años los más hábiles matemáticos se han empeñado vanamente en demostrar la imposibilidad de la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para n entero mayor que 2, o en hallar un caso en que ella se verifique. Euler demostró el teorema, para $n = 3$ (Gauss completó después la demostración deficiente de Euler). Para $n = 4$, la demostración —también de Euler— es elemental. Lejeune-Dirichlet demostró el teorema para $n = 5$, y en fin Kummer, en 1850, logró dar una demostración tan general que incluye por ejemplo todos los exponentes inferiores a 100 con excepción de 59 y 67.

Se ha llegado a sospechar que el teorema no había sido realmente demostrado por Fermat; sin razón bastante, a mi juicio. Todas las demás proposiciones enunciadas por él y cuya demostración afirma haber hallado, fueron

efectivamente verificadas después (a veces con enorme dificultad) por otros matemáticos (Euler, Lagrange, Cauchy, Legendre, etc.). La única excepción sería la fórmula 2^{2^n} = número primo, que permitiría calcular directamente números primos arbitrariamente grandes. Euler verificó que para $n = 5$, 2^{2^n} ya no es primo. Pero hay que recordar que Fermat reconoce no haber podido hallar una demostración satisfactoria de esta fórmula, que él creía exacta: "C'est une propriété, escribía a Pascal, de la vérité de laquelle je vous réponds La démonstration en est très-malaisée, et je vous avoue que je n'ai pu encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerais pas pour la chercher, si j'en étais venu à bout". Esta declaración debe fortalecer nuestro convencimiento, como observa fundadamente Cantor, de que Fermat, aunque propenso quizá a las generalizaciones arriesgadas, no consideraba nunca una simple inducción como demostración, y que, por consiguiente, cuando hablaba de una demostración suya, debemos creer que la poseía efectivamente.

El principal rol de Diofanto, el que más interesa a la historia de las Matemáticas, ha sido, como se ve, el de animador o inspirador. Una gran parte de su renombre lo debe, más que a lo hecho por él a lo que ha sido ocasión para que otros hicieran. Con todas sus deficiencias y errores, la obra de Diofanto ejerce un invencible y durable atractivo que se ha dejado sentir con fecundo resultado sobre los más altos espíritus matemáticos de los tres siglos últimos.

Hemos hablado de los errores de Diofanto. Algunos son realmente curiosos e inexcusables. En el problema 10 del libro III Diofanto declara imposible hacer igual a un cuadrado el binomio $52x^2 + 12$, que, sin embargo, se convierte en $64 = 8^2$ para $x = 1$. En el problema 11 del mismo libro incurre en un error parecido al negar la posibilidad de igualar el binomio $266x^2 - 10$ a un cuadrado, cuando es fácil ver que haciendo en él $x = 1$, se saca $266 - 10 = 256 = 16^2$.

En el problema 27 del libro IV, niega, como ya hicimos notar, que la expresión $8x^3 - x^2 + 8x - 1$ pueda identificarse con un cuadrado, olvidándose del método empleado por él mismo dos problemas antes, el cual, aplicado al caso presente, se reduce a igualar $8x^3 - x^2 + 8x - 1$ a $\left(2x - \frac{1}{12}\right)^3$ o a $\left(\frac{8}{3}x - 1\right)^3$, para obtener una ecuación lineal en x y así un valor

racional de esta incógnita.

Pero, qué importan esos pequeños lunares frente a tantos ejemplos de soluciones originalísimas y en extremo elegantes?

A este propósito, Gino Loria cita el problema 19, libro III: "Hallar cuatro números x_1, x_2, x_3, x_4 tales que el cuadrado de su suma no deje de ser un cuadrado si le añadimos (o quitamos) sucesivamente cada uno de ellos." Diofanto se vale, para resolver este intrincado problema, de la siguiente observación bien fácil de verificar: si al cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados racionales se añade o quita el cuádruplo de su área, se obtiene otro cuadrado. Resulta entonces que, considerando cuatro triángulos rectángulos con la hipotenusa común c y que tengan por catetos a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; a_3, b_3 ; a_4, b_4, y poniendo

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c\,B$, $x_1 = 2\,a_1\,b_1\,B^2$, $x_2 = 2\,a_2\,b_2\,B^2$, ..., $x_4 = 2\,a_4\,b_4\,B^2$, todas las condiciones del problema quedarán satisfechas. El valor de la indeterminada B se hallará eliminando las x entre las cinco ecuaciones, lo que da

$$B = \frac{c}{2\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + a_4\,b_4)}.$$

Se ve que toda la dificultad del problema se concentra ahora en la búsqueda de cuatro triángulos rectángulos numéricos de lados racionales que tengan la hipotenusa común. Para efectuar esa determinación, tomemos, siguiendo las trazas de Diofanto, dos triángulos rectángulos numéricos (no semejantes) α, β, γ ; α', β', γ' cuyas hipotenusas son γ y γ' (por ejemplo: 3, 4, 5; 5, 12, 13). (1) Entonces $\alpha\,.\,\gamma'$, $\beta\,.\,\gamma'$, $\gamma\,.\,\gamma'$; $\alpha'\,.\,\gamma$, $\beta'\,.\,\gamma$, $\gamma'\,.\,\gamma$ serán dos triángulos rectángulos con $\gamma\,.\,\gamma'$ por hipotenusa común. Ahora bien, obsérvese que siendo $(\gamma\,.\,\gamma')^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\,(\alpha'^2 + \beta'^2) = (\alpha\,.\,\alpha' - \beta\,.\,\beta')^2 + (\alpha\,.\,\beta' + \alpha'\,.\,\beta)^2 = (\alpha\,.\,\alpha' + \beta\,.\,\beta')^2 + (\alpha\,.\,\beta' - \alpha'\,\beta)^2$, los otros dos pares de números $(\alpha\,.\,\alpha' - \beta\,.\,\beta')$, $(\alpha\,.\,\beta' + \alpha'.\,\beta)$ y $(\alpha\,.\,\alpha' + \beta\,.\,\beta')$, $(\alpha\,.\,\beta' - \alpha'\,.\,\beta)$ medirán los catetos de otros dos triángulos rectángulos que tienen también $\gamma\,.\,\gamma'$ por hipotenusa y que constituyen con los dos precedentes la cuaterna de triángulos buscada. Queda así el problema propuesto totalmente resuelto y con plena generalidad.

Digamos, para concluir, algunas palabras sobre el opúsculo de Diofanto dedicado a los números poligonales y del que solamente se conserva un fragmento.

---

(1) Procedimiento de Pitágoras: $\left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2$

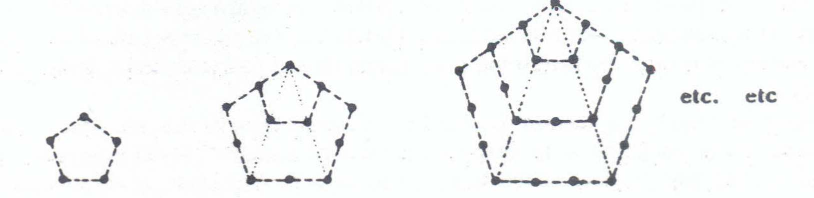
Si consideramos la sucesión de los números naturales (progresión aritmética de razón igual a la unidad), la nueva sucesión constituída por las sumas parciales de la serie formada por sus elementos: $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ es la sucesión de los números triangulares: 1, 3, 6, 10, ... , que pueden representarse por grupos sucesivos de puntos dispuestos en triángulo:

etc.

De la progresión aritmética de razón igual a 2 y cuyo primer elemento es siempre la unidad, se obtiene por el mismo procedimiento la sucesión de los números cuadrados: 1, 4, 9, 16, ...

etc.

Los números pentagonales son análogamente deducidos de la progresión: 1, 4, 7, 10, ... y forman la sucesión 1, 5, 12, 22 ... , pudiendo ser representados por pentágonos de puntos:



El fragmento, después de dar los enunciados de algunas proposiciones sobre estos números, plantea el problema de hallar de cuántos modos puede ser poligonal un número dado. El número 36, por ejemplo, es el octavo número triangular, el sexto cuadrado, el tercero de los tridecagonales y el segundo de los correspondientes al polígono de 36 lados. El número 36 puede pues ser de cuatro modos poligonal. La solución no figura completa en el fragmento que nos queda del opúsculo Wertheim demostró, sin embargo, que Diofanto pudo muy bien haber resuelto este problema, y que el comienzo de la demostración, contenido en las últimas líneas del fragmento, lejos de ser espurio, como creía Tannery — más filólogo que matemático, — pudo ser continuado hasta obtener el resultado. Para probar irrefutablemente su tesis, Wertheim ha sugerido una restauración plausible de la parte que falta para completar la solución del problema

4. - LOS MATEMATICOS ARABES

"La ciencia árabe no existe". Si hubiera que aceptar literalmente, sin las necesarias restricciones y aclaraciones que lo limitan, este rotundo juicio del que fue sabio profesor de la Facultad de Ciencias de Burdeos, P. Duhem, mi conferencia de hoy, en la que me propongo precisamente hablar de una rama de la ciencia árabe, sería un contrasentido; más todavía, si se recuerda que Duhem se refiere en especial a la *Matemática* árabe y que su opinión está lejos de ser una opinión aislada. Muchos modernos en efecto, –filósofos, literatos, historiadores,– arriban a la misma conclusión negativa. En la III parte, recién publicada, del volumen XIII (dedicado a las Ciencias Exactas) de la Historia Universal por E. Cavaigna, J. Pérés, profesor de la Universidad de Aix - Marsella, declara que "los árabes no tienen en su obra científica nada que les sea propio".

"Es decididamente imposible –proclamaba Luis Bertrand en un artículo publicado en 1928– hacer entrar en el cerebro de los franceses, y en general de los Occidentales, que los árabes nunca inventaron nada. Se habla del pensamiento árabe, como si el pensamiento árabe hubiera existido ¡jamás! Lo que se llama Filosofía o Medicina árabes no es otra cosa que una grosera compilación de la Medicina y de la Filosofía griegas. Averroes, nos dicen los eruditos, es sólo el trujamán infiel de Aristóteles, etc. etc."

¿Es legítimo ese desdén total por la ciencia árabe o llamada árabe?

En una conferencia pronunciada por Renán el 29 de Marzo de 1883 en la Sorbona, anterior por consiguiente a las opiniones que acabo de citar, la cuestión se plantea por lo menos en términos claros que disipan el mal entendido entre los que niegan a la ciencia árabe el derecho de existir, dando al adjetivo un significado restringido, y los que afirman su importancia y aún la exageran, dando a la expresión equívoca de ciencia árabe el sentido más lato. Permítaseme pues transcribir el pasaje esencial de la conferencia de Renán:

"Yo no he tratado de disminuir el rol de esa gran ciencia, llamada árabe, que señala una etapa tan importante en la historia del espíritu humano. Se ha exagerado su originalidad en algunos puntos, sobre todo respecto a la Astronomía; es necesario evitar el exceso contrario que consiste en desacreditarla inmoderadamente. Entre la desaparición de la civilización antigua en el siglo VI y el primer despertar del genio europeo en los siglos XII y XIII, ha habido lo que puede llamarse el período árabe, durante el cual la tradición del espíritu humano se efectuó en las regiones conquistadas por el Islam. Esta ciencia llamada árabe, ¿qué tiene de árabe en realidad? La lengua, nada más que la lengua. La conquista musulmana había llevado la lengua del Hedjaz hasta los confines del mundo. Sucedió con el árabe lo que ha sucedido con el latín, utilizado en todo el Occidente para expresar sentimientos e ideas que nada tenían que ver con el antiguo Lacio. Averroes, Avicena, Albateni son árabes como Alberto el Grande, Rogerio Bacon, Francisco Bacon, Espinosa son latinos. Sería tan gravemente erróneo adjudicar a la Arabia la Ciencia y la Filosofía árabes, como adjudicar toda la literatura cristiana latina, todos los escolásticos, todo el Renacimiento, toda la ciencia del siglo XVI y de parte del siglo XVII a la ciudad de Roma, so pretexto de que todo eso está escrito en latín. Lo notable, en efecto, es que entre los filósofos y los sabios llamados árabes casi no hay más

que uno solo, Alkindi, que sea de origen árabe. Todos los otros son persas, transaxianos, españoles, gente proveniente de Bokhara, de Samarkanda, de Córdoba, de Sevilla. No son árabes de sangre, ni lo son tampoco de espíritu. Emplean el árabe, pero lo hacen con embarazo, como empleaban los pensadores de la Edad Media el latín que tenían que plegar a los nuevos usos. El árabe, que tan bien se presta a la poesía y a un cierto género de elocuencia, es un instrumento incomodísimo para la Metafísica. Los filósofos y los sabios árabes son en general bastante malos escritores."

Sin aceptar, por las razones que luego daremos, la distinción estricta de Renan entre la ciencia árabe propiamente dicha y la ciencia de lengua árabe en general, vamos a enumerar los servicios que debe a los escritores árabes la divulgación de la Aritmética, el Algebra y la Geometría en Occidente, y a tratar de definir su contribución original al enriquecimiento de la ciencia matemática. Indicaremos, alguna vez cuando nos sea posible, el origen racial de los autores mencionados, aunque sin dar a esta cuestión la importancia que le atribuye Renan, preocupado ante todo por el deseo de probar la acción nefasta del fanatismo islamita (que exagera enormemente) sobre la evolución cultural del pueblo árabe, fanatismo del cual consiguieron escapar indemnes los grupos étnicos que adoptaron la lengua pero no la religión "intolerante" de los descendientes de Ismael: tales los judíos, persas arranianos, griegos arabistas, españoles mozárabes, etc.

Hay que reconocer que nada en la historia del pueblo árabe lo predestinaba a las tareas de la investigación científica. Constituído por tribus nómades en su mayoría o dispersadas en una extensión inmensa de territorio casi todo completamente estéril, sin comunicación espiritual con las grandes naciones civilizadas, que nunca lograron conquistarlo sino transitoriamente, la única actividad intelectual en que sobresale es la elocuencia. Un historiador citado por Gibbon resume en tres palabras las cualidades nativas de los ismaelitas: *non gloriabantur antiquitus arabes nisi gladio, hospite, eloquentia.* El valor guerrero, la hospitalidad y la elocuencia (no la elocuencia diléctica y demostrativa de los griegos, sino la sentenciosa y retórica a la manera española), han sido siempre las tres grandes características de esta noble raza. Gracias a su ánimo batallador, puesto al servicio de la propaganda religiosa, pudieron apoderarse de la mitad del mundo grecolatino y asiático en apenas un siglo: gracias a su espíritu caballeresco "menos grandioso pero más elegante que el castellano", consolidaban sus adquisiciones materiales captándose la simpatía de los vencidos; gracias en fin al encanto sutil y refinado del discurso, imponían por todas partes su lengua. No contentos con sus variadas y rápidas conquistas, los soberanos del nuevo imperio quisieron luego agregar el brillo de la cultura científica a sus otros prestigios, y empezó entonces desde Bagdad, la capital de la dinastía de los Abasidas (al-Mansur, Harun-ar-Raschid, contemporáneo de Carlomagno, al-Mamun, etc.), sucesores esclarecidos de los Beni-Omeyya, un gran movimiento de asimilación del saber antiguo, mediante la traducción al árabe de las obras más famosas de los filósofos, geógrafos, astrónomos, mecánicos, matemáticos y médicos indios, persas y sobretodo griegos. Aristóteles, Tolomeo, Herón de Alejandría, Philón de Bizancio, Hipócrates, Galeno, para no mencionar todavía a los matemáticos propiamente dichos, fueron desde muy temprano traducidos y comentados por los árabes. Y fue de ese modo que durante más de quinientos años toda la ciencia de la antigüedad tuvo intérprete y depositario en el idioma de estos nómades ignorados hasta poco antes por la Historia.

La civilización se tornó árabe sin dejar de ser griega, y a ella tuvieron que recurrir los estudiosos que, por extraña aberración, desdeñaban las fuentes verdaderas. *Graecum est, non legitur* (está en griego, no se lee), fue un dicho corriente en los centros de cultura medievales. Las principales obras de Aristóteles eran conocidas por traducciones latinas de las traducciones o adaptaciones árabes del original griego; y así para la Astronomía, la Medicina, las Matemáticas. Ha podido decirse de las ediciones impresas de las obras de Averroes, que ofrecían la traducción latina de una traducción hebrea de un comentario hecho sobre una traducción árabe de una traducción siríaca de un texto griego! El camino suele ser todavía más complicado. Fue tal y tan largo el abandono de las letras griegas en occidente, que algunas de las obras maestras del pensamiento heleno se hubieran perdido irremediablemente, si no las conservara hasta nosotros la piadosa labor de los traductores islamitas. Este mérito explica y justifica la más viva simpatía intelectual; pero a él se han sumado motivos menos legítimos para convertirla a veces en una admiración desmedida. "Los sentimientos contrarios al cristianismo, profesados por algunos grandes escritores del siglo XVIII, han contribuído a esta exageración. Voltaire y Gibbon, observa con justeza J.J.Ampère, se deleitaban en mostrar que los cristianos debían todo a los musulmanes." El movimiento romántico de principios del siglo XIX puso a la moda, embelleciéndolos con el ropaje de la imaginación, los episodios más pintorescos de la historia o la leyenda árabe: Chateaubriand, Goethe, Byron, Hugo celebraron en páginas inmortales la sabiduría, el valor, la generosidad de los conquistadores y la poética melancolía de su descalabro final y su destierro. Pero los más absurdos apologistas de los árabes han sido y son los arabistas. Quien ha consagrado buena parte de su vida a estudiar una lengua tan difícil como el árabe, no querrá confesar que ha perdido su tiempo. Esta es probablemente la explicación de ciertos entusiasmos ridículos que han motivado a su vez en otros escritores críticas igualmente exageradas.

Tratemos de apreciar imparcialmente el aporte efectivo de los árabes a la ciencia matemática, utilizando los trabajos de sabios como Woepcke, Chasles, Hankel, etc.

La ciencia matemática de los brahamanes pasó al Occidente por intermedio de los árabes. Bajo el califato de al-Mansur (754-775) y por orden de éste, fue traducida al árabe una extensa obra astronómica y matemática cuyo autor era, según Cantor, el sabio **Brahmagupta** de quien se recuerda y emplea todavía la fórmula que da en función de los lados el área del cuadrilátero inscriptible. Fuera de este primer contacto con la sabiduría india, los árabes no parecen haber aprovechado los profundos conocimientos matemáticos de los brahamanes, especialmente en Aritmología y Análisis indeterminado, limitando sus adquisiciones por ese lado al sistema de numeración decimal, del que hablaremos más adelante.

La penetración de la ciencia griega en el mundo del Islam se debió, según Hankel, a una circunstancia puramente accesoria e involuntaria. El cambio en las costumbres de los califas, operado al adoptar a Bagdad por capital el año 768, trajo consigo el debilitamiento físico y las enfermedades que suelen castigar el abuso del lujo y los placeres. El arte médico de los Beduinos ignoraba las dolencias engendradas por la molicie oriental. Los califas abasidas tuvieron pues que recurrir a los médicos cristianos de la secta nestoriana que habitaban al Este del Imperio. Estos hábiles discípulos de Esculapio, griegos por la cultura y muchos también por el origen, adquirieron así gran prestigio

y autoridad sobre los primeros soberanos de la nueva dinastía, y les inspiraron la admiración que ellos mismos sentían por la ciencia helena. Al-Mansur (754-775) y Harun-ar-Raschid (786-809) hicieron traducir a Hipócrates y Galeno, a Aristóteles y Euclides. Estas interesantes iniciativas fueron imitadas e intensificadas por el califa al-Mamun (813-833) que obtuvo del Emperador de Bizancio un gran número de manuscritos griegos y encargó de su traducción a un Colegio de siríacos nestorianos, instituído por él y en cuyo seno se contaban eruditos en todas las ciencias cultivadas por los griegos, además de la medicina. A los fanáticos que le reprochaban la doble impiedad de hacer traducir escritos profanos por adeptos a una secta enemiga del Islam, contestaba el buen califa que "bien podía encomendar la traducción de obras, que al fin de cuentas poco o nada tenían que ver con la religión, a las mismas personas a quienes había confiado la salud de su cuerpo". Los sucesores de al-Mamun continuaron hasta los primeros años del siglo X la tarea de incorporar a la literatura árabe todas las grandes producciones del genio griego en la Filosofía, la Medicina, la Astronomía y las Matemáticas.

Se completó así la traducción de los trece libros de los Elementos de Euclides, agregando más tarde la de los libros XIV y XV, de los cuales el primero se atribuye a Hypsicles, matemático alejandrino del segundo siglo antes de nuestra era, y el otro es de un autor desconocido muy posterior a Hypsicles. También fueron traducidas al árabe las otras obras entonces conocidas de Euclides, como la designada por el título latino *De divisionibus*, cuyo original se ha perdido; la traducción árabe, descubierta por Woepcke, fue publicada por él en 1851. Otra interesante traducción árabe es la de los siete primeros libros de las Cónicas de Apolonio (el VIII ya había desaparecido). Los libros V, VI y VII sólo nos son conocidos por esta traducción. Las obras de Arquímedes y de Herón, el *Almagesto* de Tolomeo, la *Esférica* de Teodosio, la *Aritmética* de Diofanto, fueron igualmente objeto de traducciones y comentarios en lengua árabe.

Esta brillante y útil actividad, este meritorio anhelo por asimilarse el saber antiguo y perfeccionarlo, contrasta con la absoluta inercia de los occidentales, para quienes eran sin embargo mucho más fácilmente accesibles los manuscritos de las bibliotecas bizantinas. Es pues sin jactancia que pudieron los árabes, al decir de H.J. Zeuthen, considerarse dignos discípulos de los griegos.

No obstante, del lado de la India los aportes científicos fueron también considerables. Nos hemos referido ya a la obra de Brahmagupta. Más importante aún fue la introducción del sistema de numeración decimal. Con respecto a la forma de las cifras llamadas árabes, el relato del escritor árabe al-Biruni (muerto en 1039), que pasó muchos años en la India, es interesante. "La forma de las cifras, dice, difiere, como la de las letras, según las localidades. Entre esas formas diversas los árabes eligieron las más convenientes." Existen además ciertas discrepancias entre las empleadas por los sarracenos orientales y los occidentales. Pero el hecho más sorprendente consiste en que los símbolos numerales, tanto los utilizados en el Este como los adoptados por los árabes occidentales, se asemejan más a los caracteres que usa Boecio en su *Geometría*, hablando del Abaco pitagórico, que a los signos de que se sirven actualmente los indios. Esta curiosa circunstancia es difícil de explicar. Algunos de los autores más recientes, Floriano Cajori, por ejemplo, el sabio profesor de Historia de los Matemáticos en la Universidad de California, aceptan como la más plausible la teoría de Woepcke: 1o. que, hacia el segundo siglo

de nuestra era, antes de la invención del símbolo *cero*, las cifras indas fueron introducidas en Alejandría, difundiéndose desde allí su conocimiento por el Oeste de Africa y hasta Roma; 2o. que, en el octavo siglo, cuando la notación se había ya transformado considerablemente en la India y perfeccionado por la adición del *cero* a las nueve cifras significativas los árabes de Bagdad la tomaron de los indos; 3o. que los árabes del Oeste importaron de sus correligionarios orientales el uso del nuevo símbolo numérico, pero conservando para los otros las viejas formas; 4o. que el origen indo de estas viejas formas era bien recordado por los árabes del Oeste que las designaban con la palabra *gubar* (polvo), aludiendo a la práctica de los Brahmanes de efectuar los cálculos sobre tablillas recubiertas de polvo o arena; y 5o. que, después del octavo siglo, la forma de los signos numéricos se fue alterando en la India hasta asumir el aspecto que ahora tiene (cifras Devanagari).

En resumen, nuestro sistema de numeración decimal, basado: 1o. en la adopción de cifras y no de las letras del alfabeto para representar los números, lo que facilitó indirectamente la notación literal, fundamento del Algebra; 2o. en el principio de posición; y 3o. en el consiguiente empleo de un signo particular para expresar la ausencia de unidades de un cierto orden, no es árabe sino indo, pero a los árabes se debe su divulgación en Europa.

Es evidente que esta enorme apropiación de ciencia ajena, mal podía quedar estérilmente encerrada en las bibliotecas. La creación de universidades y observatorios astronómicos contribuyó desde los primeros tiempos de la dominación árabe a estimular la producción propia más o menos original. Muchos sabios, entre ellos algunos –muy pocos, hay que reconocerlo– de pura raza árabe, escribieron numerosos tratados de Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría y Astronomía, de los que una parte han sido traducidos al latín y a las lenguas modernas. Vamos a reseñar a grandes rasgos las obras árabes que más influencia tuvieron en el resurgimiento ya próximo de la cultura occidental.

Uno de los más notables matemáticos de la época árabe y de los primeros en el orden cronológico es Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi. Floreció en el primer tercio del noveno siglo. Nada se sabe con certeza de su abolengo ni del lugar de su nacimiento, aunque se supone que fuera natural de Khorassan en Persia. El califa al-Mamun le encomendó la traducción de libros y tablas referentes a la Astronomía. Hizo, por orden del mismo califa observaciones astronómicas en Bagdad y en Damasco, y efectuó la medición de un grado de meridiano. Como la mayoría de los matemáticos árabes, dedicó pues gran parte de su actividad a la Astronomía, que, por razones religiosas, era especialmente cultivada por los musulmanes. Pero lo que más interesa a la Historia de las Matemáticas son sus tratados de Aritmética y Algebra. No se ha conservado el original del primero, que sólo se conoce por una traducción latina descubierta en la biblioteca de la Universidad de Cambridge y publicada por el príncipe de Boncompagni en 1857. El empleo de la numeración decimal da a esta obra un carácter nuevo con relación a las de los griegos. La forma del cero es ya la usual en las obras contemporáneas, como se ve por el pasage: *Si nihil remansit pones* circulum, *ut non sit differentia vacua... ne fonte, cum vacua fuerit, minuantur differentiae et putetur secunda esse prima*, que expresa con absoluta claridad el uso del nuevo y tan útil signo, si se tiene cuidado de entender por

differentia, lugar o posición. El tratado de Algebra de al-Khowarizmi, escrito antes que la Aritmética y que se conserva todavía en el original árabe, ocupa un lugar prominente en la historia de esta ciencia, pues en él se inspiraron todos los que sobre ella escribieron, hasta el Renacimiento. El Algebra de al-Khowarizmi fue traducida al inglés por F. Rosen en 1831, y una vieja traducción latina fue reproducida por Libri en su *Historia de las ciencias matemáticas en Italia* (I, pág. 253-297). El título en árabe de la obra consta de las dos palabras *Aldschbr* y *Mukabala*, palabras que significan, según parece, respectivamente *restauración* y *reducción*. Con la palabra *restauración* se quiere expresar el transporte de los términos negativos de un miembro al otro de las ecuaciones, en tanto que el vocable *reducción* tendría el sentido técnico de unión en un solo término de varios similares. La palabra Aldschbr, que dio origen a la designación moderna de esta ciencia subsiste aún en el derivado *algebrista*, empleado por el pueblo de España y Portugal con la acepción de *cirujano empírico que se dedica a concertar y restaurar huesos fracturados o dislocados*. El Don Quijote, el Centón Epistolario y otros clásicos dan a la voz ese sentido vulgar que el Diccionario de la Academia Española mantiene todavía. La doctrina algebraica de al-Khowarizmi es poco original y parece tomada eclécticamente de los griegos y de los Indos. El nombre latinizado de este sabio, *Algoritmi* ha pasado a expresar en la terminología matemática: un sistema de notaciones y reglas que permiten efectuar mecánicamente ciertos cálculos.

La influencia de al-Khowarizmi se extiende hasta Leonardo de Pisa (Fibonacci), matemático de los albores del Renacimiento.

Entre los muchos herederos intelectuales de al-Khowarizmi, citaremos solamente los más célebres.

Los tres hermanos Mohamed, Ahmed y Husán, hijos de Musa ben Sakir, favorito del Califa al-Mamun. De sus obras se conserva, en una traducción latina, la Geometría, que contiene la fórmula de Herón para la superficie de un triángulo en función de sus lados, demostrada de una manera original, o en todo caso diferente de la de Herón.

Tabit ibn Korra vivió del año 836 al 901. Experto conocedor del griego, dio excelentes traducciones árabes de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Tolomeo, Teodosio. Sus fórmulas sobre los números amigos (se llaman así dos números de los cuales cada uno es la suma de los factores del otro) constituye el primer trabajo original de los árabes. Tabit ibn Korra fue además el primero, fuera de los chinos, en ocuparse de los cuadrados mágicos.

Uno de los más afamados astrónomos de la segunda mitad del mismo siglo es al-Battani, llamado así por ser oriundo de Battán en Mesopotamia, pero cuyo nombre verdadero era Mohámed ben Gobir ben Sinan abu Abdallah, apodado el Tolomeo árabe. Introdujo las cotangentes en la Trigonometría, sustituyó los senos a las cuerdas, añadió a las fórmulas conocidas de la Trigonometría esférica, la que hoy llamamos fórmula fundamental: $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$, y aún la transformación de esa fórmula en esta otra: $\operatorname{senvers} A = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$ que evita la multiplicación de dos

casenos en el numerador, ventaja apreciable cuando no se conocían los logaritmos. (Seguimos aquí la opinión de Hankel y Cantor; A von Braunmühl es menos favorable a Al-Battani).

Abu'l Wefa (940-998) hizo el importante descubrimiento de la *variación* de la luna, que se atribuye falsamente a Tycho-Brahe, tradujo a Diofanto, inventó un procedimiento para calcular las tablas de los senos, que le permitió expresar con una aproximación de mil millonésimas el seno de medio grado, e introdujo las funciones trigonométricas *secante* y *cosecante*.

Los árabes conocían el gran teorema de Fermat para el exponente 3. Abu Mohámed al-Khoyandi pretendió demostrarlo, pero su demostración, probablemente defectuosa, se ha perdido.

Diversos matemáticos árabes tentaron la resolución geométrica de las ecuaciones cúbicas, a propósito del problema arquimedeano de dividir una esfera por un plano en forma tal que los segmentos guardaran entre sí una relación dada. El primero que planteó el problema algebraicamente por medio de una ecuación de tercer grado fue al-Mahani de Bagdad, y el primero en resolver la ecuación –empleando las secciones cónicas– fue Abu Dscha 'far Alchazin. Otras soluciones fueron obtenidas por al–Kuhi, al -Hasán ibn al-Haitam y otros.

La determinación del lado del heptágono regular era otro problema difícil que exigía la resolución de la ecuación cúbica: $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
Intentada por muchos, fue al fin hallada por Abu'l Dschud.

Entre los algebristas de la época árabe merece recordación especial el gran poeta persa Omar Kayyam(1040-1123), cuyos cuartetos han sido traducidos a todas las lenguas modernas. Pero este hombre extraordinario, ariano de raza y profundamente escéptico en religión y filosofía, no tenía nada de árabe ni de islamita. De sus obras científicas han llegado a nosotros: *La demostración de algunos problemas de Algebra*, traducida al francés y publicada por Woepcke en 1851 y el *Tratado sobre algunas dificultades en las definiciones de Euclides*, cuyo manuscrito se conserva en la biblioteca de la Universidad de Leyden.

Entre 1100 y 1300 empieza a decaer el Imperio árabe de Oriente bajo los golpes de las cruzadas y de las invasiones mongoles. El califato de Bagdad fue sustituído hacia fines del siglo XIV por el Imperio de Tamerlán.

Nasir-Eddin (1201-1274) es el último representante de la civilización árabe oriental. El fue el primero en instituir la Trigonometría, considerada hasta entonces como simple auxiliar de la Astronomía, en ciencia autónoma. El tratado que dedicó a esta disciplina quedó ignorado por los sabios del Renacimiento. La Trigonometría que dio celebridad a Juan Müller, el Regiomontano, siglo y medio después, no supera ciertamente el tratado de Nasir-Eddin.

Contemporáneamente con los árabes de Asia Menor, la cultura científica de los árabes de España brilló con esplendor bastante para que Suter pudiera decir –hace ochenta años, es cierto– que la Ciencia española no ha vuelto a alcanzar el grado máximo de florecimiento a que había llegado bajo la dominación musulmana.

Los califas de Occidente, como los abasidas, crearon bibliotecas, entre otras la de

Córdoba que llegó a tener 600.000 volúmenes, y observatorios y escuelas que no tardaron en atraer a los sabios de toda Europa.

La historia de los Matemáticos árabes en España ha sido poco estudiada. José A. Sánchez Pérez en sus *Biografías de los matemáticos árabes que florecieron en España*, Madrid, 1921, cita algunos nombres que merecen recordarse:

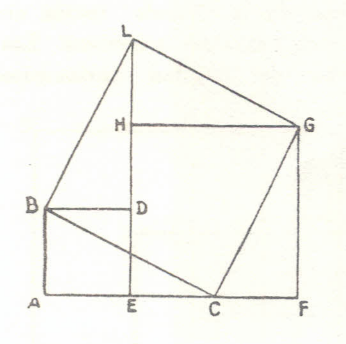
Abderramán ben Ismail, llamado el Euclides andaluz; Abu'l Casim Maslama, de Madrid, autor de una Aritmética Mercantil; Asbag ben Mohamed, autor de comentarios euclidianos, de una Geometría superior y de una historia de la Física; Arzaquiel o Arzaquel (de alrededor de 1080), astrónomo célebre como observador concienzudo y teórico audaz: determinó con gran exactitud la excentricidad de la eclíptica y la declinación máxima del sol y mantuvo contra las ideas dominantes de los astrónomos contemporáneos el principio del movimiento elíptico de los planetas, sirviendo sus trabajos de base a las llamadas *Tablas toledanas* y a las obras astronómicas de Alfonso el sabio: Abu'l Mohámed Dschabir ibn Aflah, apodado al-Ischbili (el sevillano), generalmente llamado Geber y a quien suelen confundir con Geber al-Sufi, el alquimista, maestro de los maestros, según Bacon y considerado uno de los doce mayores genios de la humanidad por Cardán: a Geber el matemático se debe una demostración de la proporcionalidad entre los senos de los lados y los senos de los ángulos opuestos de todo triángulo esférico.

Enumeremos en fin, un poco al azar, algunos pequeños inventos matemáticos atribuídos a los árabes y omitidos en la reseña precedente.

Abu'l Wafa parece haber sido el primero en ocuparse de la resolución de los problemas de Geometría con la regla y el compás de abertura constante.

La construcción de la elipse, llamada construcción de los jardineros, se debe probablemente a los árabes (los tres hijos de Musa ben Sakir).

La siguiente sencilla demostración del teorema de Pitágoras se encuentra por primera vez en Tabit ibn Korra:



Sea ABC el triángulo dado, rectángulo en A. Prolonguemos su lado AC hasta F, haciendo EF = AC. Completemos los cuadrados ABDE y EHGF, y terminemos la figura trazando los triángulos LGH y LDB iguales al dado. Se ve inmediatamente que los cuatro triángulos ABC, CFG, GHL y LBD son iguales entre sí y que el cuadrilátero BCGL es un cuadrado. Según eliminemos de la figura total AFGLB los triángulos BDL y HGL o sus iguales ABC y CFG, tendremos la suma de los cuadrados correspondientes a los catetos o el cuadrado construído sobre la hipotenusa. Este último es, por consiguiente, equivalente a aquella suma.

Es notable el método que emplea Nasir-Eddin para calcular los lados de un triángulo esférico del que se conocen los ángulos. Reduce el problema a

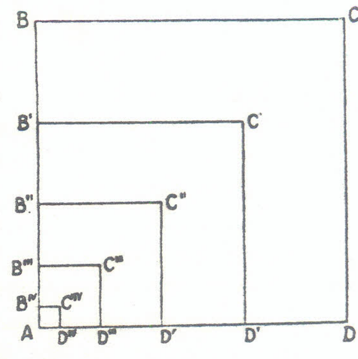
la construcción del triángulo polar o suplementario, es decir, del triángulo cuyos lados tienen por polos los vértices del triángulo dado.

El mismo Nasir-Eddin conocía ya el teorema de Geometría cinemática: *Todo punto de la circunferencia de un círculo que rueda en el interior de otro círculo de radio doble, describe una recta.*

La prueba por 9 para la multiplicación aparece en Avicena por primera vez.

Los árabes se dedicaron con éxito al cálculo de las sumaciones de series numéricas finitas. Chasles, en la sesión del 27 de marzo de 1867 de la Academia de las Ciencias de París, analiza en un largo *compte-rendu* tres obras traducidas del árabe por Woepcke y Marre. Esas obras son de diversos autores, entre otros Alkalaçadi, matemático árabe español muerto en 1486, el cual comenta la Aritmética práctica de ibn Albanna, matemático y astrónomo que floreció en Marruecos en la primera mitad del siglo XII. De la exposición o resumen de Chasles resulta que los árabes conocían fórmulas de sumación de los números naturales consecutivos y de sus potencias 2.ª, 3.ª y 4.ª, así como otras muchas fórmulas análogas. Las primeras tres sumas eran ya conocidas de los griegos, aunque la referente a los cubos: $1^3 + 2^3 + \dots + r^3 = \left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2$ permaneció generalmente ignorada por mucho tiempo.

Quizá es Pascal el primero de los modernos que alude a ella (en un opúsculo titulado *Potestatum numericarum summa*), mostrondo así una erudición poco ordinaria. La fórmula para la sumación de las cuartas potencias es probablemente original. También podría ser original (nada a lo menos prueba lo contrario) la demostración geométrica muy ingeniosa de la fórmula recién citada referente a la suma de los cubos de los números naturales sucesivos. Esa demostración, que se halla en una obra de Alkarkhi, de Bagdad (principios del siglo XI) consiste en imaginar un cuadrado ABCD cuyo lado AB se supone igual a $1 + 2 + 3 + \dots + r$ y del que se sustrae el gnomon B'BCDD'C'B' de ancho BB' igual a r. El área de éste es manifiestamente igual a $2r \times AB - r^2 = 2r\frac{r(r+1)}{2} - r^2 \quad r^2(r+1-1) = r^3$. Es claro que si se resta luego el gnomon B''B'C'D'D''C''B'' de ancho igual a $r - 1$ y cuya área es $(r-1)^3$, y se continua así hasta reducir el cuadrado interior al $AB^{IV}C^{IV}D^{IV}A$ de lado igual



a la unidad y cuya área es también igual a la unidad, la suma del área de este cuadrado, igual a 1 o a 1^3, más las de todos los gnomones, las cuales son iguales a $2^3, 3^3, \ldots r^3$, resulta igual al área total del cuadrado ABCD, que es igual a $(1+2+\ldots+r)^2 = \left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2$ Luego, en fin: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + r^3 = \left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2$

El historiados de los Matemáticos, Florian Cajori, concluye con las siguientes palabras el capítulo de su obra consagrada al período árabe: "Hemos comprobado una laudable actividad intelectual en los árabes, que tuvieron la suerte de contar con gobernantes capaces de promover con su munificencia la investigación científica. En las cortes de los califas los sabios encontraron bibliotecas y observatorios. Un gran número de obras astronómicas y matemáticas fueron escritas por autores árabes.

"Se ha dicho que los árabes eran eruditos pero no originales: el conocimiento que ahora poseemos de sus trabajos nos obliga a revocar esa sentencia. Tienen en su haber serias conquistas científicas. Resolvieron ecuaciones cúbicas por medio de la Geometría, llevaron la Trigonometría a un alto grado de perfección y realizaron otros numerosos adelantos de menos importancia en Matemáticas, Física y Astronomía. No fue el menor de sus servicios a la Ciencia haber adoptado el saber de la Grecia y de la India, conservándolo cuidadosamente. Cuando el fervor científico resurgió en el mundo occidental, transmitieron a los europeos los valiosos tesoros de la antigüedad. Y así una raza semítica fue durante oscuras edades guardadora fiel del acervo intelectual de los arios".

Cajori, como se ve, no distingue entre los árabes de estirpe y los de religión y *status* político. Esa distinción no interesa al Historiador de las Matemáticas. Tampoco la hacía, por otra parte, Luis Bertrand, en su juicio aplastante contra la ciencia árabe, ya que cita como árabes a personajes de origen probablemente judío. En realidad la distinción expresa entre árabes e islamitas en general no la hace, que yo sepa, otro escritor que Renán. ¿Conviene y puede hacerse tal distinción y casi oposición entre elementos étnicos que estuvieron por muchos siglos íntimamente amalgamados y entre los cuales debieron ser frecuentes las relaciones de consaguineidad? La distinción se justificaría si la raza ismaelita fuera *esencialmente* inferior frente a las otras que integraban el imperio musulmán. Esa inferioridad no podría en manera alguna demostrarse. Goethe admiraba el genio poético de los árabes. El canciller von Müller nos ha conservado este curioso juicio del autor del West-oestlicher Diwan: "Los árabes no han tenido durante cinco siglos más que siete poetas cuyo valor hayan querido reconocer; y entre los que rechazaron había algunos que valían más que yo". El mismo Renán, en su ensayo sobre *Averroes* y el *Averroismo* afirma que "mientras la hegemonía del Islam permaneció en manos de los árabes, raza *tan fina y espiritual*, la tendencia anticivilizadora de la religión mahometana fue combatida; pero esa tendencia reinó sin contrapeso cuando los turcos, los bereberes y otros pueblos bárbaros tomaron la dirección del Islam". Y en su estudio *sobre Mahoma y los orígenes del Islamismo*, reconoce que "nada sería más inexacto que fi-

gurarse a los árabes antes del Islamismo como una nación grosera, ignorante, supersticiosa; habría que decir, al contrario, que era una nación refinada y escéptica"... "No sé, añade, si hay en toda la historia de la civilización un cuadro más gracioso, más amable, más animado que el de la vida árabe antes del Islam: libertad ilimitada, ausencia completa de leyes y autoridades, sentimiento exaltado del honor, vida nómade y caballeresca, fantasía, alegría, malicia, poesía ligera e indevota, refinamiento en el amor". Y admite en fin, aunque de mala gana, la existencia de algún sabio más o menos original entre los árabes de raza. ¿Y cómo podría negarlo, sin un estudio biográfico completo de todos los grandes hombres que ilustraron el período llamado árabe? Semejante estudio es por ahora imposible. En un trabajo publicado en el Boletín de Boncompagni (vol. V, pág. 427) por Schneider sobre una memoria inédita muy completa de Bernardo Baldi, titulada *Vidas de matemáticos árabes*, los datos a ese respecto son escasos y dudosos. Los nombres mismos sufren de un escritor a otro extrañas alteraciones, y las indicaciones de origen racial o no existen, o son contradictorias, o se basan en meras probabilidades "Al-Kindi, a quien se suponía judío, era, como se ha demostrado más tarde, árabe de sangre, a pesar de sus tres prenombres bien hebraicos: Jacob Isaac Josef".

Reconozcamos, en suma, que el período de la civilización para el cual la historia ha consagrado el calificativo de árabe, está bien designado, y que (en proporciones sin duda modestas) *la ciencia árabe ha existido*.

5. - LAS MATEMATICAS EN EL PERIODO MEDIEVAL CRISTIANO

La historia parece confirmar en las andanzas de los pueblos y las razas la ley biológica según la cual los órganos que han agotado su rol en la evolución de cada especie desaparecen o se atrofian; y es así cómo la cultura musulmana en España decayó y se extinguió cuando el progreso cultural de los otros países de Europa logró independizarse de las escuelas árabes de la Península.

Curioso fenómeno de una civilización que resplandece durante cuatro siglos y se apaga para siempre.

Fue principalmente el Emperador Federico II (1194-1250) quien provocó o aceleró el resurgimiento de nuestra ciencia fuera de España, haciendo traducir al latín, entre otras obras matemáticas, las que habían sido traducidas del griego por los árabes (Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo, etc.). Los sabios de la Europa cristiana occidental pudieron luego reanudar el curso de los descubrimientos matemáticos desde el punto a que habían llegado aquellos geniales representantes del pensamiento heleno y sus diligentes divulgadores y continuadores. Hasta entonces el logro de ese objeto exigía toda la abnegación necesaria para aprender a leer los textos árabes en el original o para ir a instruirse directamente en las Universidades de Córdoba, Toledo, Sevilla, Granada; y como el mundo cristiano de la Edad Media reservaba sus entusiasmos para muy distintos fines, él ha dejado pocos nombres famosos (todos ellos posteriores al siglo XII) en la historia de las Matemáticas.

En cuanto a los cristianos de Oriente, las controversias teológicas y gramaticales absorbían su actividad intelectual. "Si no fuera, dice Cantor, por la obligación imperiosa de ser completos (*das Gebot der Vollständigkeit*) terminaríamos de buena gana con Diofanto la consideración de las obras matemáticas escritas en lengua griega". La pobre cultura bizantina, que la religión y los acontecimientos políticos habían, por lo demás, encerrado en un estrecho aislamiento, no nos ocupará, pues, mucho rato.

Quédanos, en suma, como exclusiva o casi exclusiva materia de esta conferencia: primero –en el período que va desde la caída de Roma hasta el reinado de Federico II– la producción matemática en lengua latina, es decir, la obra insignificante de los rarísimos autores romanos de libros elementales de Aritmética y Geometría, a la que se agrega (producción de escaso valor también) la que tuvo su origen en los claustros, únicos focos del saber en aquellas épocas oscuras. Una segunda etapa, ya más interesante, nos llevará desde el reinado de Federico II hasta la era moderna.

Entre los romanos que escribieron sobre las Matemáticas, ya citamos en una conferencia anterior a *Boethio* o *Boecio* (Anius Manlius Severinus Boethius), nacido hacia el año 480. Su padre había sido cónsul, él mismo lo fue bajo el reinado de Teodorico el Ostrogodo, y sus dos hijos fueron también simultáneamente cónsules en 522. Su renombre le viene más bien de las tristísimas vicisitudes de su vida pública y de la gran nobleza de su carácter, que de las obras que legó a la posteridad. Su larga disertación titulada *De Consolatione Philosophiae*, escrita en la cárcel de Pavia, en la que fue, tras un largo encierro, brutalmente ejecutado en 524, lo consagra, sin embargo, junto con sus opúsculos sagrados, como el último de los filósofos romanos y el primero de los teó-

logos escolásticos. Muy leído durante la Edad Media y aún después, especialmente en Inglaterra, donde se le tradujo en anglosajón por el Rey Alfredo, en el viejo inglés del siglo XIV por Chaucer, y, más tarde, en inglés moderno repetidas veces, hasta su inclusión en la Biblioteca Clásica de Loeb (1926)[1], la popularidad de este libro, que Gibbon llama en su estilo pomposo "a golden volume not unworthy of the leisure of Plato or of Tully", se contagió a las otras obras de Boecio: a su tratado de Música, usado hasta época no muy lejana como texto en las Universidades de Oxford y Cambridge, y a su Aritmética y su Geometría, constantemente consultadas en la Edad Media.

La *Aritmética* de Boecio es una traducción de la de Nicómaco y ni siquiera puede gloriarse de ser la primera. Apuleyo, el autor de la célebre novela satírica *El Asno de Oro*, había traducido ya, en efecto, la Aritmética de Nicómaco algunos siglos antes. Es además una mala traducción, pues si Boecio dominaba suficientemente el griego, en cambio la indigencia de sus conocimientos matemáticos era tal, que lo obligaba a omitir las partes un poco difíciles del original, que son, naturalmente, las más importantes.

La *Geometría*, cuya paternidad le ha sido discutida, injustamente según parece, no vale mucho más. Es una colección de las primeras definiciones y teoremas de Euclides, sin ninguna demostración. Una disgresión aritmética, bastante inoportuna en un tratado de Geometría, es, sin embargo, lo que hay en él de más interesante como documento histórico. He aquí en qué términos empieza Boecio esa curiosa digresión:

"Los Pitagóricos (entiéndase los Neo-pitagóricos), para no equivocarse al efectuar multiplicaciones, divisiones y medidas –sutiles y llenos de inventiva como eran–, se sirvieron de un dispositivo al que, para honrar a su maestro, dieron el nombre de Mesa Pitagórica, Mensa Pythagorea, y que más tarde fue llamada Abaco".

La Mesa Pitagórica se distinguía en un detalle esencial de los ábacos usuales. En estos últimos, un número se representaba colocando en las ranuras o hilos paralelos del cuadro tantos pequeños guijarros o bolillas o fichas como unidades del orden correspondiente a la ranura tuviera el número en cuestión. En la Mesa Pitagórica se colocaba en cada ranura una sola ficha, que llevaba escrito un carácter especial, representativo de uno de los números que van de uno a nueve. Toda ranura correspondiente a un orden de unidades que no figurase en el número propuesto, quedaba vacía. Los nueve caracteres, designados con la palabra *apices*, de no fácil interpretación, eran generalmente, salvo algunas variantes sin importancia, como sigue:

Quiere decir, pues, que en la época de Boecio ya se aplicaba, siquiera en el ábaco, el principio básico de nuestro sistema de numeración decimal: el valor de posición. Hubiera bastado agregar a los nueve ápices un signo que representase el cero, para tener realizada la moderna escritura, la cual, sin embargo, no se generalizó del todo en Europa, como veremos más adelante, hasta después del siglo XIV. Nada quizás traduce mejor la lentitud del progreso matemático de la Edad Media, que èsa incapacidad de dar el último paso hacia la reforma de la numeración, a pesar de las ventajas evidentes del nuevo

1. La última edición y la mejor sin duda, es la de 1934 en el Corpus de Viena.

sistema y del hecho de haber sido claramente expuesto, según lo hicimos notar en nuestra última conferencia, desde principios del siglo IX (Aritmética de Mohámed ibn Musa al-Khowarizmi).

Después de Boecio pueden citarse: *Isidoro de Sevilla, Beda, Alcuino, Gerberto,* aunque ninguno de ellos hizo adelantar sensiblemente las Matemáticas.

San Isidoro, Obispo de Sevilla (570-636), hombre de extraordinaria erudición y elocuencia, es autor de una muy vasta y muy indigesta enciclopedia, a la que puso por títulos "Orígenes" o "Etimologías". Hay poco en ella que se refiera a nuestra ciencia, y eso mismo sin interés, cuando no incomprensible o absurdo. "El carácter de la Geometría, es la multiplicación, dice, mientras que la Aritmética tiene por fundamento la adición." (¿) Las etimologías son inverosímilmente fantasistas. Las que da para los números, por ejemplo, "parecerían, al decir de Cantor, una broma al lector, si no estuviéramos convencidos de la perfecta seriedad de Isidoro." En esta Enciclopedia aparece, pero no por primera vez, la clasificación de la enseñanza en siete ramas. Las tres primeras (Gramática, Lógica y Retórica) formaban el ciclo más elemental, llamado *trivium*; en tanto que las cuatro restantes constituían un grado superior, con el nombre de *quadrivium*; en este último entraban la Aritmética, la Geometría, la Música y la Astronomía.

Beda (672-735), apodado el Venerable y considerado el hombre más sabio de su tiempo, nació y pasó toda su vida en la región próxima a las desembocaduras del Tyne y del Were, en la frontera de Inglaterra y de Escocia, donde existían los dos monasterios de la regla de San Benito, dedicados a San Pedro y a San Pablo.

De sus obras, la única que le sobrevive es la *Historia de la Iglesia*, que todavía se lee con gran interés. Toda su producción matemática un poco original, se limita casi exclusivamente al cómputo de las fiestas movibles.

El año de la muerte de Beda fue el del nacimiento de Alcuino, cuyo nombre anglosajón de Alh-Win él latinizaba en la forma de Albinus. Fue algo así como el Ministro de Instrucción Pública de Carlomagno, desde 782. En 796, ya viejo y enfermo, se retiró al Monasterio de San Martín de Tours en calidad de abate. Allí fundó una escuela, que no tardó en hacerse famosa, y allí también murió, en 804.

Aunque su actividad consistió siempre en organizar y enseñar, se le atribuye una colección o más bien recopilación de temas prácticos *ad acuendos juvenes*, "para aguzar el ingenio de los jóvenes", que debían tenerlo muy obtuso en verdad para necesitar de tales ejercicios, los cuales antes parecen acertijos de almanaque popular que problemas de Matemáticas. Uno de ellos bastará para mostrar el carácter de la obra:

> "Dos hombres compran doscientos cincuenta cerdos por cien sueldos, a razón de dos sueldos, por cinco cerdos. Dividen su propiedad común en dos tropas de ciento veinticinco animales cada una, la primera compuesta de los mejores o más gordos, y la otra de los inferiores o de menos peso. Luego revenden los cerdos, cobrando un sueldo por cada dos de la primera tropa y un sueldo también por cada tres de la segunda, es decir, siempre a razón de cinco cerdos por dos sueldos. ¿Cómo se explica que los revendedores obtuvieran así y todo una buena ganancia?"

Tenemos que saltar dos siglos para llegar, no a un matemático propiamente dicho, pero sí a un personaje de gran relieve histórico, el cual, entre otras muy variadas aptitudes y vocaciones, demostró una ardiente curiosidad por los problemas de la Aritmética y la Geometría, adquiriendo en estas disciplinas un saber que llenó de asombro a sus contemporáneos.

Nacido en Auvernia a mediados del siglo X, nuestro personaje cambió su nombre de Gilberto (Gerbertus) por el de Silvestre II, al ser electo Papa en 999, cuatro años antes de su muerte. Fue el primer francés que ocupó la silla de San Pedro. No relataremos sus raras aventuras, sus viajes y sus intrigas políticas, ya que sólo debe interesarnos su obra matemática.

Perfeccionó el ábaco y explicó el modo de usarlo en su *Regula de abaco computi*, donde se incluye también el cálculo de los números fraccionarios con denominadores múltiplos de doce. Este sistema duodecimal aplicado a los quebrados es, como se sabe, antiquísimo y parece haber sido sugerido por la división del año en doce meses lunares, o por la comodidad que ofrece el gran número de divisores del número doce, o por algún otro motivo ignorado.

El *Libellus de numerorum divisione* es un tratadito de Aritmética impreso primeramente entre las obras de Beda, pero restituido a Gerberto por Chasles, que lo tradujo y comentó. Se cree que igualmente le pertenece, y figura en la edición de sus obras completas publicada por Ollerio (Clemont Ferrand y París, 1867) y en la de sus obras matemáticas debida a Bubnow (Berlín, 1897), una Geometría que reproduce los problemas prácticos de aplicación, en especial de Agrimensura (medida de alturas y distancias de objetos inaccesibles, determinación de áreas y otros, que sin duda fueron tomados fielmente de los autores romanos para quienes se ha consagrado el nombre de Agrimensores), y contiene además otras enseñanzas, inspiradas probablemente en fuentes griegas más directas.

Es quizá original, y vale la pena mencionarlo por la dificultad que entonces presentaba, el problema incluído en esta Geometría, consistente en hallar los catetos de un triángulo rectángulo del que se dan el área y la hipotenusa. Gerberto llegó a la solución exacta dependiente de una ecuación de segundo grado.

Los historiadores han dado con entera justicia el nombre de Renacimiento al movimiento de renovación cultural, social y filosófico que se produjo en Europa occidental hacia fines de la Edad Media. En los siglos XI a XIII, las Cruzadas, que abren las relaciones científicas y comerciales con el Oriente; en los siglos XIII y XIV, la creación de las grandes Universidades, que organizan la Enseñanza Media y algunas ramas de la Enseñanza Superior; la invención de la imprenta, poco después, divulgadora incomparable del saber; la introducción de las armas de fuego, que aniquilan el feudalismo; la erudición bizantina, refugiándose en Italia tras la caída de Constantinopla; y, en fin, los grandes viajes y descubrimientos geográficos de los portugueses y españoles, fueron, con otras causas menos eficaces o aparentes, los factores principales de esta profunda revolución espiritual.

En el dominio de las ciencias exactas, el resurgimiento se muestra ya con evidencia desde los tiempos del Emperador Federico II, aunque seguido de una nueva caída en la inacción.

Leonardo de Pisa o Leonardo Fibonacci (es decir, *filius Bonacci*) nació por el año 1175. Cuenta él mismo en el prefacio de su primera obra, publicada en 1202 y conocida bajo el título de *Liber abaci*, que su padre, notario de los negociantes pisanos de Bugía, lo hizo conducir, niño aún, a esta ciudad de Argelia, donde aprendió a calcular por medio del ábaco. Sus tareas lo obligaron pronto a viajar por el Egipto, la Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, lo que le permitió instruirse en otros procedimientos de numeración y cálculo aritmético y particularmente en el que, originario de la India, había sido generalmente adoptado por los árabes.

El *Liber abaci* es una vastísima y (en parte) original colección de operaciones sobre números enteros y fraccionarios, progresiones aritméticas y geométricas, sumas de sucesiones, extracción de raíces cuadradas y cúbicas, variadísimos problemas aritmológicos, ecuaciones determinadas de 2o. grado, aplicaciones comerciales, etc., etc. Las demostraciones son con frecuencia geométricas e inspiradas, sin duda, en los trabajos de la escuela árabe de al-Karchi y abu-Ramil, rivales de al-Khowarizmi. El empleo de la numeración inda, constante en el *Liber abaci*, revela empero la influencia de la Aritmética del último de los tres matemáticos árabes citados. Por eso, a pesar de su título, el *Liber abaci* contribuyó al abandono del ábaco en toda Europa, aunque de modo tan lento que, hasta el año 1666, en Inglaterra, los empleados del Tesoro (*Exchequer*) continuaban sirviéndose de él, y que más o menos lo mismo sucedía en otros países civilizados.

Hoy, ya casi no se recuerda a Fibonacci más que por la sucesión infinita de números que lleva su nombre:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

primer ejemplo de serie recurrente conocido y origen de curiosísimas e imprevistas aplicaciones al análisis superior.

La identidad

$$(a^2 + b^2)\ (p^2 + q^2) = (ap + bq)^2 +$$
$$(aq - bp)^2 = (aq + bp)^2 + (ap - bq)^2$$

fué probablemente inventada por Fibonacci. En efecto: después de afirmar que un producto de la forma $(a^2 + b^2)\ (p^2 + q^2)$ puede siempre convertirse, de dos modos diferentes, en la suma de dos cuadrados exactos, Fibonacci agrega las condiciones $ap \neq bq$ y $aq \neq bp$, de donde parece evidenciarse que aquella identidad no debía serle desconocida. Si algunas de estas condiciones deja de cumplirse, la suma del segundo miembro se transforma en un solo cuadrado. Si, por ejemplo, $ap = bq$, $(a^2 + b^2)\ (p^2 + q^2)$

$= (aq + bp)^2$. La descomposición en la suma de dos cuadrados puede todavía entonces efectuarse por el procedimiento de Diofanto (libro II, problemas 8 y 9), como lo explicamos en nuestra penúltima conferencia. Así se obtiene

$$(aq + bq)^2 = \left[\frac{2m(aq + bp)}{m^2 + 1}\right]^2 + \left[\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}(aq + bp)\right]^2$$

(siendo m un entero cualquiera superior a la unidad), con la salvedad de que los sumandos ya no son entonces números enteros. Euler ha generalizado la identidad de Fibonacci, demostrando que

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = (ap - bq + cr - ds)^2 + (aq + bp - cs - dr)^2 + (ar - bs - cp + dq)^2 + (as + br + cq + dp)^2.$$

y las variantes en el segundo miembro que se consiguen cambiando los signos de cualquiera de las ocho letras. Tanto a la identidad de Fibonacci como a la de Euler, se llega por la aplicación de fórmulas elementales de la teoría de los determinantes.

También puede atribuírsele, con un poco de buena voluntad, la demostración del gran teorema de Fermat (imposibilidad, para números enteros mayores que 2, de la igualdad $x^n + y^n = z^n$) en el caso particular de $n = 4$, por cuanto esta proposición fluye fácilmente de las consideraciones que hace al ocuparse del problema propuesto por Johannes Panormitanus —personaje de la Corte de Federico II—, a saber: *hallar un cuadrado que, aumentado o disminuído en cinco unidades, dé dos cuadrados* [solución de Fibonacci:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2, \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2\Big].$$

Su *Practica Geometriae* (1220) contiene los conocimientos de Geometría y Trigonometría de origen árabe y griego asequibles ya en las traducciones latinas de *Gerardo de Cremona* y *Platón de Tivoli*, matemáticos italianos muy anteriores a Fibonacci. Todo ese material disponible está expuesto en la *Practica Geometriae* con método y rigor demostrativo.

En resumen: un gran vulgarizador y un hábil matemático, original a veces, pero que sería exagerado catalogar entre los genios innovadores.

Murió en 1240, o alrededor de esa fecha. Sus obras, tanto las que hemos mencionado expresamente, como otras que dejó inéditas, entre ellas el interesante *Liber quadratorum*, han sido publicadas en Roma, de 1857 a 1862 por el eruditísimo y meritísimo bibliófilo Baltasar Boncompagni.

Desde Leonardo de Pisa hasta los últimos años de la Edad Media, apenas pueden citarse cuatro o seis nombres dignos de recordación en la Historia de las Matemáticas.

Jordano Nemorario, muerto en 1237, fue General de la Orden de los Dominicos. En su trabajo, *De numeris datis*, designa invariablemente con letras los números arbitrarios, pero sin ir hasta el cálculo literal; de modo que, si representa por a y b dos factores, empleará una tercera letra para indicar el producto, y no ab u otra notación análoga.

Contemporáneo de Jordano Nemorario fue *Juan de Holywood o Hollybush* (en latín, generalmente transformado en *Johannes de Sacrobosco*), así llamado por el probable lugar de su nacimiento, que, según parece, no es otro que la ciudad de Yorkshire, cuyo nombre actual es Halifax. Se ignora cuándo nació, pero se sabe que murió, ya viejo, en 1256. Su Aritmética: *Tractatus de arte numerandi*, es una colección de reglas sin demostración, de escaso valor científico, por consiguiente, pero de gran interés práctico; lo que le permitió gozar por varios siglos, de extraordinaria popularidad.

A esta obra y a otras de aquellos tiempos, puede aplicarse el juicio de R. Wolf sobre el *De sphaera mundi*, del mismo Sacrobosco: "ein gutes Buch für eine schlechte Zeit".

Alberto Magno, Tomás de Aquino, Rogerio Bacon, son grandes hombres de la ciencia del siglo XIII, pero ajenos casi por completo al progreso de las Matemáticas.

Nicolás Oresme, que fue Obispo de Lisieux, en Normandía, pertenece al siglo siguiente (1323-1382, más o menos). Sus principales contribuciones originales a la Aritmética consisten: 1) En haber concebido las potencias fraccionarias. Con notaciones menos cómodas, generales y expresivas que las introducidas definitivamente por Newton, señalan, con todo, un sensible adelanto. 2) En el estudio de la serie recurrente

$$1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + \dots\dots\dots ,$$

cuya suma calculó. Sus otras actividades científicas se desarrollan en dominios menos interesantes de nuestro punto de vista.

Dijimos ya que, durante la Edad Media, la Matemática griega, que Cicerón ponía –con justicia– tan por encima de la romana, había descendido al mismo nivel miserable que esta última nunca logró superar.

No obstante, en el siglo XIV, se pueden citar, en medio de la general ignorancia, los nombres del monje *Máximo Planudes* –cuyas obras demuestran que la numeración inda

era conocida en Grecia– y de *Manuel Moscópulo*, que introdujo en Europa los llamados cuadros mágicos, curiosidad recreativa conocida ya de los japoneses y de los árabes y que fue inventada por los chinos hace cuatro o cinco mil años, como lo probaría el siguiente ejemplo:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

cuyo orígen se pretende hacer remontar a esa época.

Dos obras más importantes de ese mismo siglo XIV, son la Aritmética, escrita en 1321 por el judío francés *Levy ben Gerson* (1288-1344), en la cual figuran ya algunas fórmulas de la Teoría combinatoria, nuevas entonces, y la *Geometría Speculativa* de *Tomás Bradwardino*, fraile inglés nacido a fines del siglo XIII y nombrado Arzobispo de Canterbury poco antes de su muerte, ocurrida en 1349. Mereció el título de *doctor profundus*, tan grande era la fama de su saber. Escrita en 1344 e impresa en 1495, la *Geometría Speculativa* es su principal producción matemática. Contiene, entre otras cosas de menos enjundia, una teoría de las figuras isoperímetras y algunas consideraciones sobre los polígonos *egredientes* o estrellados.

Con respecto al primer tema, enuncia las cuatro proposiciones siguientes: 1) De dos figuras isoperímetras, la que tenga más ángulos encerrará mayor superficie. 2) A igualdad del número de ángulos, la figura en que éstos sean iguales entre sí contendrá mayor superficie. 3) Entre dos polígonos cerrados, del mismo número de vértices y cuyos ángulos sean iguales entre sí, el polígono regular supera al otro en superficie. 4) La circunferencia es, de todas las figuras isoperímetras, la que abarca la máxima área. Estas proposiciones fueron seguramente imitadas del libro de *Zenodoro* (matemático griego que vivió probablemente uno o dos siglos antes de nuestra era) sobre esta clase de figuras, libro traducido al árabe y del árabe al latín (en el siglo XIV). *Pappus* había también expuesto, ampliándola, en el libro V de su *Colección*, la teoría de Zenodoro, después de comprobar que el instinto de las abejas en la construcción hexagonal de las celdas de sus panales, se había adelantado a la ciencia de los geómetras.

En cuanto a los polígonos estrellados, cuyo descubrimiento se atribuye a los Pitagóricos, Bradwardino observa que un polígono estrellado de primer orden se forma prolongando los lados de un polígono convexo ordinario hasta que se encuentren cada dos subcontiguos. El pentágono estrellado es el primer polígono de primer orden. La suma de sus ángulos es igual a $2R$. Para el de n lados, dicha suma es $(2n - 8)R$. Los polígonos estrellados de segundo orden se obtienen prolongando los lados de los de primer orden, etc. El primer polígono estrellado de segundo orden es el heptágono.

Bradwardino se abstiene de llevar mucho más lejos sus investigaciones. Enuncia tímidamente un teorema sobre la suma de los ángulos del primer polígono de cada orden, la cual es igual a $2R$, y aumenta en $2R$ para cada uno de los sucesivos polígonos del mismo orden. La fórmula que da el total de la suma de los ángulos de un polígono es-

trellado de orden n y de $2n + k + 2$ vértices, es $2kR$, y ha sido demostrada con todo rigor por Poinsot, quien probablemente ignoraba la *Geometría Speculativa*, ni hubiera ganado mucho con conocerla. La historia de los polígonos estrellados, en la Antigüedad y en la Edad Media, ha sido materia de un notable estudio de Günther, publicado por Boncompagni en su Boletín (t. VI, pág. 313).

5.1. - EL PAPEL DE LAS UNIVERSIDADES

El ejemplo de la civilización árabe se dejó también sentir en la fundación de las universidades, que fueron diseminándose por toda Europa en los siglos XII-XV. Fue en ese período que tuvieron sus modestísimos comienzos los futuros grandes centros de estudios superiores. Nacidas –puede decirse– al pie de los claustros, estas primeras universidades solo brillaron al principio de la enseñanza de la Teología y la Filosofía escolástica. Por mucho tiempo las iniciativas de reforma de los estudios cayeron en el vacío. Entre los autores de estas iniciativas, prematuras pero no por eso menos meritorias, hay que citar a *Rogerio Bacon*, el monje inglés (1214 ?-1294), que luchó con vano entusiasmo por introducir en las universidades el cultivo serio de las Matemáticas. Su apología de las "divinas Matemáticas", que debían ser el fundamento de una instrucción liberal, porque "sólo ellas pueden purificar la inteligencia y preparar al estudiante para adquirir todos los demás conocimientos", no logró triunfar de las influencias ambientes. Podemos apreciar la mezquindad de las nociones matemáticas que brindaban por aquellos tiempos las más célebres universidades a sus alumnos del *quadrivium*, cuando el mismo Bacon nos dice que en la de Oxford eran pocos los que estudiaban la Geometría más allá de la quinta proposición del libro I de Euclides: *"En los triángulos isósceles, los ángulos de la base son iguales entre sí."*

La importancia de las universidades fue mucha, sin embargo, ya que la penuria de libros hacía entonces poco menos que imposible instruirse de otro modo que oyendo a los grandes maestros. Esa penuria era tal, que en los claustros solían atarse con cadena, por temor de que fueran robadas, las raras copias de los libros más leídos, cuyo precio era a veces fabuloso. Giner de los Ríos (*Pedagogía Universitaria*) cuenta que, en 1044, el Obispo y Canónigos de la Catedral de Barcelona compraron un ejemplar del *Ars Prisciani*, dando por él una casa y un viñedo.

Historiemos brevemente el origen de las principales universidades fundadas en la Edad Media.

Junto a las escuelas dependientes de los monasterios y catedrales, fueron formándose asociaciones o corporaciones de maestros y estudiantes, germen de las universidades medievales (*Universitates Magistrorum et Scholarium*), cuyas fechas de fundación es generalmente difícil precisar. Cuando una de estas *universitates*, después de cierto tiempo de existencia, conseguía reunir un número considerable de alumnos, reclamaba algunos privilegios legales, como el de exigir (en teoría, por lo menos) el pago de los cursos que orgnizaba y el de poder otorgar títulos o grados que conferían a sus poseedores el derecho de enseñar a su vez. La creación oficial de la Universidad se hace coincidir generalmente con la concesión de esos privilegios.

Una de las más antiguas universidades de Europa así constituídas fue, según se cree, la de París, en 1200, aunque no se la conoció con el nombre de Universidad hasta 1250. Después de la de París, las universidades más antiguas e ilustres de Francia fueron las de Montpellier y Orleans. En Inglaterra, las universidades de Oxford y Cambridge recibieron sus privileios legales en 1214 y 1231, respectivamente. Todas las grandes universidades italianas surgieron, puede decirse que a la vez, en el siglo XIII; pero la de Bolo-

nia había precedido a las otras: en ella se expedían ya grados universitarios desde mediados del siglo XII. España se enorgullece todavía de su Universidad de Salamanca, fundada hacia el año 1239, y que, si no es la más antigua de las universidades españolas, llegó a ser la más famosa de España y una de las más famosas del mundo, en la época de su pleno florecimiento (en el siglo XVI), cuando 6 a 8 mil estudiantes la frecuentaban. La portuguesa de Coimbra (año 1290) tiene para nosotros el alto prestigio de haberse formado en ella el más grande de los matemáticos ibéricos: Francisco Gomes Teixeira (1851-1933). Siguiendo el modelo de la Universidad de París, se fundaron las universidades alemanas más renombradas: Praga (1348); Viena (1365), donde se cultivaban las matemáticas con especial dedicación; Heidelberg (1386), Colonia (1388), Erfurt (1392), Leipzig (1409).

Los alumnos solían ser admitidos muy jóvenes –aun antes de completar los doce años– a empezar los estudios del *trivium* (Gramática latina, Lógica y Retórica). El título de Bachiller en Artes, *Baccalaureus Artium*, se obtenía al final de este período y habilitaba para iniciar el *Quadrivium* y para ejercer la enseñanza con ciertas limitaciones. Algunos bachilleres se dedicaban inmediatamente a aprender el Derecho civil o canónico; otros seguían por tres años más los cursos del *quadrivium* (Aritmética, Música, Geometría y Astronomía). El título de *Magister Artium*, todavía hoy es corriente en las universidades de los países anglosajones, se acordaba al final de este segundo período. Al principio, este título de *Magister Artium* era un simple permiso para enseñar, y bastaba para conseguirlo haber asistido regularmente a los cursos y observado una conducta irreprochable. Pero las exigencias fueron creciendo a medida que los grados académicos de Maestro en Artes o el Doctorado o la *Licentia docendi* adquirían para su poseedor más valor práctico. Se introdujo así, además de la obligación de residir y enseñar en la misma universidad durante el plazo mínimo de un año, la de rendir pruebas de suficiencia.

Este privilegio de sólo conceder grados a los que justificaran sus conocimientos mediante examen, fue obtenido por la Universidad de París después de una incidencia que W. W. Rouse Ball relata en su *Historia de las Matemáticas*. En 1426 aquella Universidad negó la concesión de un título a cierto estudiante –un eslavo, llamado Pablo Nicolás– que no había podido pasar con éxito las pruebas requeridas, y perdía luego el pleito iniciado contra la Universidad para que le concediera, a pesar de su fracaso, el ambicionado título. Rouse Ball hace notar que a este Pablo Nicolás le cabe el honor de haber sido el primer estudiante *bochado* que menciona la Historia.

Lo que más llama la atención en la organización original de las universidades medievales es el predominio de la influencia estudiantil. La explicación del hecho está en el interés material de las ciudades universitarias (pequeñas ciudades provinciales, muchas veces) por atraer con toda clase de franquicias y derechos a los estudiantes forasteros, que enriquecían su comercio, y también, sin duda, en la noble emulación que las llevaba a consentir los mayores sacrificios para superar a sus rivales, no sólo en la fama de los profesores, sino a la vez en el número de los alumnos. La ciudad de Bolonia, por ejemplo, llegó a gastar por año 20.000 ducados, suma equivalente a la mitad del total de sus rentas, para hacer de su Universidad –como lo fue por muchos siglos, y es todavía– una de las más ilustres del mundo. Algunas ciudades concedían a los estudiantes extran-

jeros la ciudadanía, la exoneración de impuestos, la liberación de ciertas penas, el derecho de ir armados. La ciudad de Padua, por los estatutos de su Universidad, se comprometía a prestar el dinero necesario a los estudiantes pobres. La gratuidad de los estudios era de regla en Italia, según Libri, y probablemente, de un modo más o menos completo, en todos los otros países. En principio, los profesores podían, es cierto, hacerse pagar los cursos *extraordinarios*, pero en la práctica, aun éstos resultaban gratuitos. El historiador de las Ciencias Matemáticas en Italia reproduce las quejas de un profesor del siglo XIII cuyos discípulos eludían el pago correspondiente a sus lecciones extraordinarias. *"Et dico vobis"*, les advertía terminando su discurso de fin de año, *"quod in anno sequenti intendo docere ordinarie bene et legaliter sicut unquam feci; extraordinarie non credo legere, quia scholares non sunt boni pagatores: volunt seire, sed nolunt solvere. Non habeo vobis plura dicere: eatis cum benedictione Domini."*

¿Qué influencia tuvieron estas universidades en la evolución de la ciencia que nos interesa? O, para ser más concretos, ¿en que consistía la enseñanza matemática en las universidades de la Edad Media? Sería difícil, para contestar a esta pregunta, recurrir a mejor fuente que la magistral *Historia de las Matemáticas en la Antiguedad y en la Edad Media*, de Hermann Hankel. Limitémonos a traducir, corrigiendo al pasar alguna pequeña inadvertencia:

"Agregándose a la producción escrita de los matemáticos de entonces, ha de considerarse también su actividad docente en las universidades, pues la historia de estos numerosos centros orgánicos de la vida científica que al comenzar el siglo XIII surgieron en todos los países neolatinos, es indispensable para la comprensión del período siguiente.

"La enseñanza en las universidades, ampliando el horizonte intelectual hasta abarcar la literatura científica de los árabes y todos los escritos de Aristóteles, "il maestro di color che sanno", ya no podía caber en el marco estrecho dentro del cual el siglo XI había encerrado sus modestos conocimientos. El "trivium" y el "quadrivium" perdieron su antiguo significado, o sólo servían para obtener, con el grado de bachiller, la preparación necesaria a fin de consagrarse a estudios propiamente científicos, es a saber: las obras de Aristóteles y sus comentarios.

"París, la reina de las universidades, que gozaba en todas las cuestiones científicas de una segura y decisiva autoridad, parece haber concedido durante la Edad Media, poca importancia a los estudios matemáticos. Por lo menos, es un hecho que en pleno siglo XVI son todavía frecuentes las quejas de los matemáticos que comprobaban en la enseñanza de su ciencia la incuria de la universidad. En la reforma universitaria de 1366, la única disposición referente a la enseñanza de las Matemáticas es la de que nadie podrá ser admitido "ad licentiam" si no ha asistido a la lectura de algunos libros matemáticos, "aliquos libros mathematicos audiverit". La misma exigencia reaparece en 1452 y en 1600. Además, podemos deducir del prefacio de una obra de comentarios sobre los seis primeros libros de Euclides, publicada en 1536, que no podía conferirse la dignidad de "Magister Artium" a quien no hubiera declarado antes, bajo estricto juramento, "jure jurando arctissimo sese prenominatos Euclidis libros audivisse" (sin entenderlos quizás, pues de ello se hubiera juzgado mejor con un examen, el cual, si alguna vez tenía lugar, no iba más allá del Libro I, como lo prueba el apodo que solía aplicarse al teorema de Pitágoras con que dicho libro termina: "Magister Matheseos"). Y aún parece dudoso que se cumpliese regularmente la dis-

posición relativa a la lectura o audición obligatoria de los primeros libros de Euclides. Obsérvese, en efecto que un programa de cursos realmente dictados durante los años 1437 y 1438 en la Universidad de Leipzig, cuyo reglamento contenía aquella misma prescripción, no menciona al geómetra alejandrino. Tampoco parecen haberse ocupado mucho los señores profesores de este autor difícil; en todo caso no conozco ningún comentario, ninguna paráfrasis de los elementos anterior al siglo XVI, y hasta en el año 1534 el miserable extracto de Euclides hecho por Boecio se vendía a los estudiantes de París con el nombre de "Geometría Euclid's Megarensis", pues así llamaban entonces al gran geómetra, confundiéndolo con su homónimo el discípulo de Sócrates y fundador de la escuela megárica, el cual debía, en su calidad de sofista, ser, a los ojos de los estudiantes y profesores de la Edad Media, el hombre a propósito para escribir una obra matemática.

"Mejor sitio reservó a las Matemáticas la Universidad de Praga. En ella se exigía a los futuros bachilleres asistir al curso dictado sobre la base del "Tractatus de Sphaera", escrito por Sacrobosco en 1250. Este tratado, que sirvió de texto por más de cuatro siglos en todas las universidades, a través de innumerables comentarios, explicaba los principios de la Astronomía esférica y de la Geografía matemática, así como los fenómenos más sencillos de la bóveda celeste; todo ello, es verdad, sin aplicar proposiciones matemáticas,desde que su lectura figuraba al comienzo de los estudios. Pero al "Magister Artium" no sólo se exigía la asistencia al curso en que se explicaban los seis primeros libros de Euclides sino también de acuerdo con la extensión del antiguo "quadrivium", Música teórica y otros conocimientos de Matemática aplicada. Para adquirir éstos, debían oir lecciones de "Theorica Planetárum" en el texto vastamente comentado, ampliamente divulgado y detestable de Gerardo de Cremona, texto que ya había sido objeto de vehementes ataques por parte de Regiomontano (1436-1476); y debían además seguir un curso de Perspectiva común, que era como llamaban entonces a la Optica. Esta ciencia, después de conocida por sus traducciones al latín y al italiano la Optica de Alhazen (siglo XI), escrita originariamente en árabe, atraía vivamente el interés de muchos sabios, entre otros Rogerio Bacon (muerto poco antes de 1300); Witelo (latinizado en Vitelius), nacido en el siglo XIII en Polonia de padre turingio, y John Peckham (disparatadamente latinizado en Pisanus), muerto en 1291 y cuyo tratado sobre esta materia era el más difundido de todos. También se dictaban en Praga, en el siglo XIV, cursos de Calendario, de Cálculo digital a la manera antigua, de Algoritmo y Aritmética; pero, sobre todo, se explicaba el Almagesto de Ptolomeo, en una larga serie de lecciones, lo que constituía la gran distinción de esta Universidad. Con excepción de la enseñanza de la Astronomía, las circunstancias eran las mismas en la Universidad de Lepzig, hija espiritual de la de Praga, y en la de Colonia, fundada en 1388 sobre el modelo de la de París; y para que se juzgue de cuán pequeñas eran las variaciones que sufría la enseñanza universitaria en el espacio y en el tiempo, baste citar el hecho de que, en los primeros decenios del siglo XVI, en Leipzig se daban las mismas lecciones y se usaban los mismos textos que en Praga al fin del siglo XIV.

"Las Matemáticas ocupaban en las universidades italianas de Bolonia, Parma, Pisa, el mismo rango que en las de Francia y Alemania; sólo que en Italia, donde la Astrología gozaba de más crédito que en ningún otro país, esta pretendida ciencia era materia de cursos especiales. Así vemos al profesor de Matemáticas de la Universidad de Pisa, todavía en el año 1598, explicar, no el Almagesto, sino una obra astrológica, también atribuída al autor del Almagesto con el título de "Quadripartitum".



"Los hombres de la Edad Media se interesaban preferentemente por las cuestiones escolásticas-teológicas y estético-literarias. A cada facultad le llega el período propicio para su desarrollo, que suele alcanzar su apogeo independientemente de las causas exteriores. Sería ridículo achacar a la influencia "clerical" o a la "grosera superstición" reinantes en la Edad Media, la penuria de la producción matemática. Que se nos muestre, si se quiere aducir un argumento serio, a un solo hombre de aquellos tiempos con pasta de gran matemático.

"Después de cuanto dejamos dicho, concluye Hankel, la incapacidad de toda la Edad Media para el trabajo matemático no necesita de más demostración."

Permítasenos, antes de dar fin a esta conferencia, agregar algunas palabras destinadas a completar la exposición de Hankel.

No sería exacto ni razonable creer que la Edad Media haya sido, como todavía lo suponen algunos retardados, una especie de noche milenaria, durante la cual el espíritu humano duerme un torpe sueño, que no interrumpen ni el resplandor de las hogueras encendidas por el fanatismo, ni el estrépito de las guerras de religión o de rapiña.

Desde hace algunos años, el estudio imparcial y penetrante de los hombres y las cosas de la Edad Media va destruyendo el exagerado descrédito que pesaba sobre ella.

La escuela neo-tomista ha rehecho el concepto que se tenía de la Filosofía medieval. La Historia literaria ha rehabilitado la obra de los prosistas y más aún de los poetas cristianos, que lograron crear (antes de que las lenguas romances empezaran a producir, dentro todavía de la Edad Media, sus primeras obras maestras) un latín apenas diferente del clásico, pero bastante evolucionado sin embargo para poder expresar –con singular encanto muchas veces– los delicados matices de una sensibilidad nueva.

¿Y qué decir de aquella original arquitectura gótica, sublime concretización del fervor religioso, que en el siglo XI "cubrió el suelo de Europa de un blanco manto de catedrales"; o del canto litúrgico inventando el contrapunto, "cuna de la armonía y de todo el arte musical moderno"?

En la técnica de las mas diversas profesiones y oficios, la lista de los descubrimientos correspondientes a esta época, es tan larga como importante. Un sabio escritor francés, M. Lefebvre de Noëttes, publicaba recientemente un inventario de estos descubrimientos. Entre ellos figuran los siguientes: el sistema moderno de tiro para los vehículos a tracción de sangre; el adoquinado de las calles y carreteras; los molinos de agua y de viento; el aserradero mecánico; la fragua de martinete; el fuelle de válvula; el timón de codaste; la esclusa; la pólvora, el reloj de pesas; las gatas; el cepillo de carpintero; la imprenta.

Completamente estéril en frutos matemáticos, la Edad Media abunda en otras producciones de la inteligencia.

Así pues como el florecimiento de las Matemáticas alejandrinas coincide con una decadencia completa de la Filosofía, la Literatura, las Bellas Artes, –en la Edad Media la inercia matemática coexiste con una actividad bastante intensa y eficaz en otros dominios.

La Historia de los adelantos de nuestra ciencia aparece, en verdad, como lo dice Hankel, independiente de las circunstancias exteriores, y, lo que es más raro, agragaríamos nosotros, *incluso del estado contemporáneo de la cultura general*.

INDICE

Se terminó de imprimir
en el mes de agosto de 1990
en el Departamento de Publicaciones de la
Facultad de Humanidades y Ciencias

Depósito Legal No. 245.763

Esta primera edición completa, prologada y ubicada históricamente de las "Lecciones de Historia de las Matemáticas" que desarrollara el Ingeniero Eduardo García de Zúñiga entre los años 1924 a 1935 en la Facultad de Ingeniería, constituye un acto de esencial justicia, para con lo mejor y más avanzado de la primera generación de científicos y técnicos con que contó nuestra República. Su autor fue modelo de intelectual comprometido con la práctica social e industrial de principio de siglo en nuestro país. Su pensamiento trascendió el empirismo técnico y en el campo de la investigación y estudio de las matemáticas, devino un humanista. Conocerlo hoy es comprender las mayores realizaciones académicas y sociales de nuestro pasado para afrontar los nuevos desafíos, que se plantean a nuestra cultura e identidad nacional.
La Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, al publicar estas Lecciones rinde homenaje a los grandes universitarios, que con su esfuerzo, cimentaron nuestro país.

Eduardo García de Zúñiga (1867-1951).
Perteneciente a la primera promoción de Ingenieros nacionales (1892) tuvo una dilatada actuación como tal, como docente universitario y también en la gestión pública. Fue Decano de la Facultad de Ingeniería durante tres períodos y miembro del Consejo de la Facultad de Humanidades y Ciencias. También desempeñó la presidencia del Instituto de Estudios Superiores. Sobre su profesión publicó varios trabajos de los que se destaca su **Historia del Puerto de Montevideo** (1939) y numerosos trabajos de matemáticas fundamentalmente en la **Revista de Ingeniería** y en la **Revista del Centro de Estudiantes de Ingeniería**.